

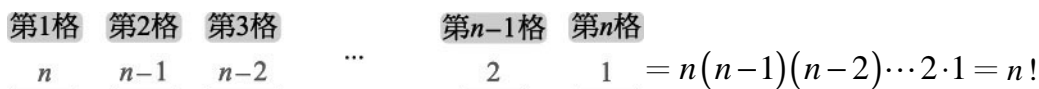
重點 1：前言

意義：計數方法數可以利用**窮舉法**或**樹狀圖**解決之外，亦可使用「有系統的計數方法」，分別是：
排列、重複排列、組合、重複組合(高中暫不介紹)等四類方法

例 1.1：若在 1, 2, 3, 4 中要選兩個數出來，試分別以排列、重複排列、組合、重複組合說明它們之間的不同

重點 2：直線排列－(全部選取排列)

1. 定義：將 n 個不同事物排成一列，如下圖，其方法數有 $n!$ 種方法；視為 n 個全取排成一列，方法數為 $P_n^n = n!$ 種



註：與「將 a, b, c, d (四個不同事物) 排成一列」相同意義的語句有：

- ① 將 a, b, c, d 放到四個不同的位置上
- ② 將四個不同的東西按順序挑出來 ... 重點在「依序決定位置」

2. 有關 $n!$ 的計算：

- (1) $n!$ 讀作「 **n 階乘**」，即 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ ，且規定 $0! = 1$ (P_n^n 讀作：P, n 取 n)
- (2) $n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \cdots$
- (3) 常用： $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040$

例 2.1：計算並寫出下列各式之值：

- (1) $4! = \underline{\hspace{2cm}}$
- (2) $5! = \underline{\hspace{2cm}}$
- (3) $6! = \underline{\hspace{2cm}}$

例 2.2：將 1, 2, 3 排成一列，試以窮舉或樹狀圖、乘法原理分別計數，其方法數有多少種方法？

例 2.3：小珊家的大門用的是電子鎖，如圖所示。如果要解鎖的話，必須將 1 到 9 的所有數字，依某種順序都按過一次，試問：

- (1) 有多少種按的順序？
- (2) 如果小珊設定正中間的 5 號必須在第五次按到，那這樣有多少種按的順序？



重點 3：直線排列－(選取部分排列)

1. 定義：從 n 個不同物品中，選出 k 個排成一列， $0 \leq k \leq n$ ，其方法數有 P_k^n 種方法

$$\begin{array}{ccccccc} \text{第1格} & \text{第2格} & \text{第3格} & & \text{第}k-1\text{格} & \text{第}k\text{格} & \\ \hline n & n-1 & n-2 & \cdots & n-k+2 & n-k+1 & \end{array} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = P_k^n$$

2. 有關方法數 P_k^n 的計算：

(1) P_k^n 讀作：P， n 取 k ，即 $P_k^n = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ 項}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ (記法： n 向下取 k 個數相乘)

(2) 全取排列(n 個不同物品中，選出 n 個排列)之方法數 $= P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

3. 排列術語：

(1) **完全相鄰** = 視為一個整體；(2) **完全分開** = 最後再排列；(3) **限定位置** = 排容原理；(4) **限定順序** = 視為相同物

例 3.1：試求下列的排列數：

(1) $P_3^5 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $P_2^7 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $P_6^6 = \underline{\hspace{2cm}}$

例 3.2：從 5 個不同物品中選出 3 個來排成一列的方法數

例 3.3：從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 之中任取 4 個不同的數字排成一列，試求有多少種排法？

例 3.4：三男兩女共五人排成一列拍團體照。試問下列的條件之下，各有多少種排列的方法？

- (1) 甲、乙兩人感情太好，一定要站在相鄰的兩個位置
- (2) 丙、丁兩人存有心結，一定不要站在相鄰的位置
- (3) 男女相間排列

例 3.5：甲、乙、丙、丁、戊五人排成一行進遊樂場的鬼屋，試求：

- (1) 戊不走最前面的排法有多少種？
- (2) 戊不要走最前面，且丙不走最後面的排法有多少種？



重點 4：直線排列—含有相同物(不盡相異物)

意義：設 n 個物品分成 k 類(每類中的物品都相同)，每類各有 m_1, m_2, \dots, m_k 個相同物，其中 $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

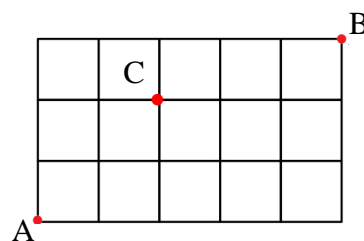
則這 n 個物品排成一列的方法數有 $\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ 種方法

例 4.1：將 $abbb$ 排成一列，其方法數有多少種？

例 4.2：小芬連續擲一枚硬幣五次，其中出現三次正面。試問硬幣正、反面出現的順序有幾種？

例 4.3：如圖的棋盤街道，試求：

- (1) 從 A 點走到 B 點的最短路徑有幾條？
- (2) 從 A 點走到 B 點且一定要經過 C 點的最短路徑有幾條？



例 4.4：由 6 個數字 0, 0, 1, 1, 2, 2 排成的六位數，共有多少個？

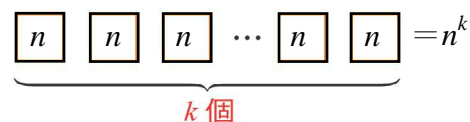
重點 5：重複排列

1. 意義：從 n 種不同的事物中，任意選出 k 個排成一列，每種事物都可以重複出現，且重複次數不限，稱為**重複排列**

2. 方法數：從 n 種物品中取出 k 個(每種物品都至少有 k 個)排成一列，物品可以重複出現，則有 n^k 種排列方法

註：方法數 n^k 中， k 為可重複出現者(取出物件個數)

註：計算從 n 種物品中取出 k 個的重複排列的方法數如右圖



註：杯子裝酒、禮物分給人、人選船搭、滾輪選號 $\rightarrow A$ 對 B ， \therefore 方法數 = B^A

例 5.1：將兩個物品排成一列，每個物品可以是 a, b, c, d 其中之一，且物品可以重複使用，則有多少種方法？

例 5.2：小斌腳踏車上的密碼鎖如圖所示，有 4 個滾輪，每一個滾輪上都有 0, 1, 2, ..., 9 等 10 個數字可供選擇。試問密碼有多少種設定方法？



例5.3：小芬想將右圖的各個圓著色，一共有紅、藍、黃、白、黑、綠六種顏色可以使用，每種顏色可以重複使用但是規定有線段相鄰的兩圓不可以同色，試問共有幾種方法？



例 5.4：生物體的基因所帶的遺傳訊息是以含氮鹼基序列的型式記載於 DNA 分子中，每一個含氮鹼基都有 A, G, C, T 四種可能。圖為某細胞進行 DNA 複製時分離出的單股 DNA 片段，該單股 DNA 片段上有 12 個含氮鹼基，試求此單股 DNA 片段最多有多少種不同的鹼基序列？

