Ch 1-1 直角三角形的邊角關係　　　　一年____班　座號：____　姓名：

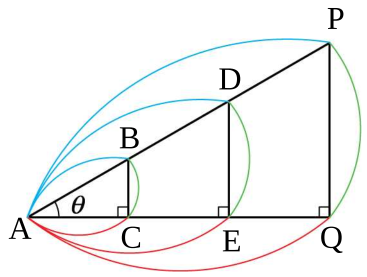
重點 1：直角三角形邊的比例

意義：兩相似的三角形，其三邊長的比例是**固定的**，不因三角形的大小不同而改變

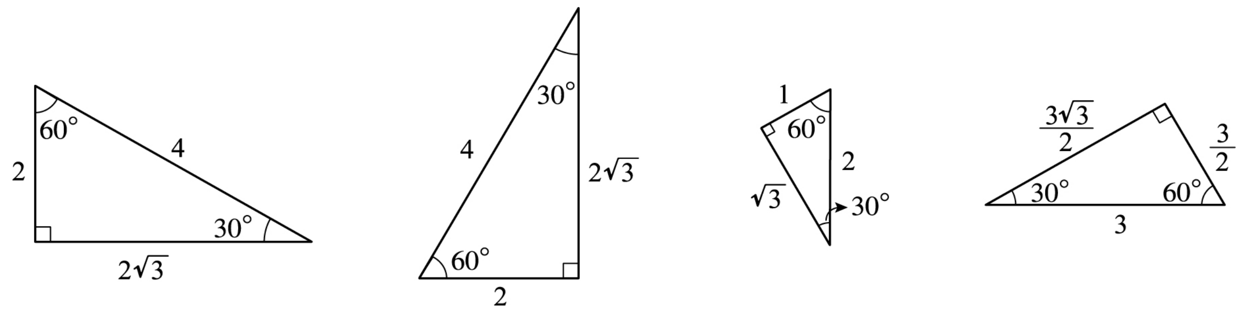
註：(1)若△ABC～△A′B′C′ (根據 AA 相似)，則「對應邊成比例」,「對應角相等」

(2)如右圖，相似的三角形△ABC～△ADE～△APQ 中

邊長的比例和三角形的大小無關，只和夾角 θ (讀做 *theta*)的大小有關



例 1.1：試觀察下列大小不同的 30°－60°－90°直角三角形：



(1)根據__________性質，上列直角三角形皆**相似**，其三邊長的比(30°－60°－90°)都是__________

(2)試求下列各比值：

(A) $\dfrac{30°\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ ＝______　　(B) $\dfrac{30°\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ ＝______　　(C) $\dfrac{30°\text{的對邊長}}{30°\text{的鄰邊長}}$ ＝______

重點 2：直角三角形的三角比(三角函數)

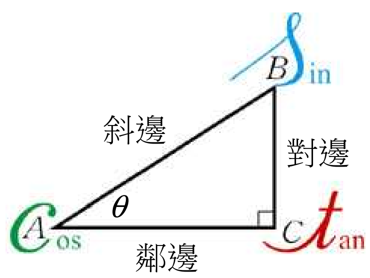
1.定義：直角△ABC 中，設$\angle C = 90°$，如右圖

對∠A 而言，$\overline{BC}$ 稱作$\angle A$ 的**對邊**，$\overline{AC}$ 稱作$\angle A$ 的**鄰邊**，$\overline{AB}$ 稱作$\angle A$ 的**斜邊**

(1)∠A 的**正弦**函數(sine A)，$\sin A = \dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

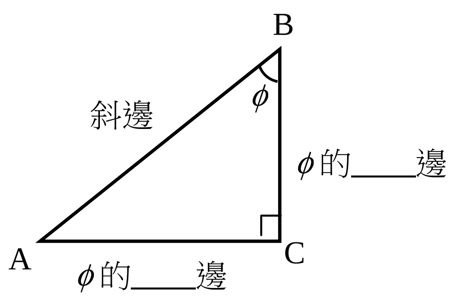
(2)∠A 的**餘弦**函數(cosine A)，$\cos A = \dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

(3)∠A 的**正切**函數(tangent A)，$\tan A = \dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



註：如右圖，設$\angle B＝\phi$，則$\overline{BC}$ 稱作$\angle B$ 的_____**邊**，$\overline{AC}$ 稱作$\angle B$ 的_____**邊**

$\Rightarrow \sin\phi ＝ \boxed{}$　　$\cos\phi ＝ \boxed{}$　　$\tan\phi ＝ \boxed{}$



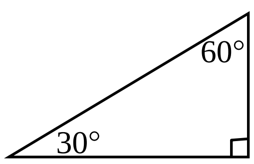
2.性質：(1)以θ表示任一銳角時，則三角函數表為 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$

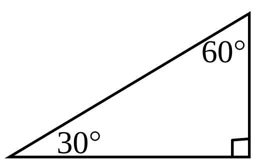
(2)銳角θ的 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 皆為兩邊長的比值，為**不具單位**的正數

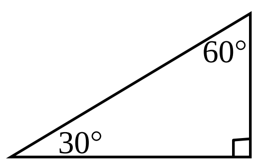
(3) $\angle A$ 為銳角時，$0<\sin A<1$ 且 $0<\cos A<1$，$\tan A>0$

例 2.1：試求下列各值：

(1) sin 30°＝______　　(2) cos 30°＝______　　(3) tan 30°＝______

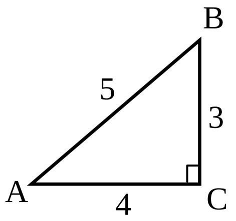


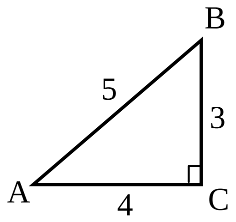


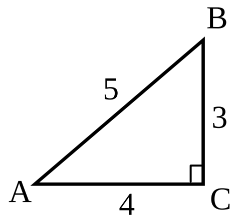


例 2.2：設直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，三邊長 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，試求下列各值：

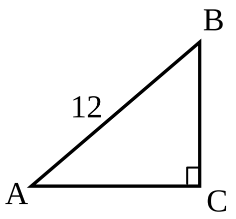
(1) $\sin A=$_____ (2) $\cos A=$_____ (3) $\tan A=$_____







例 2.3：直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，斜邊 $\overline{AB}=12$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$，試求 $\overline{BC}$ 邊長=______



重點 3：三角比(函數) $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 的基本關係

1.意義：在直角△ABC 中，$\angle C$ 為直角，若$\angle A=\theta$，且以 a，b，c 分別表示∠A，∠B，∠C 的對邊長，如下圖

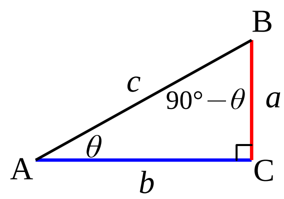
則 $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$

2.基本關係：$0^\circ<\theta<90^\circ$

(1)商數關係式：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2)平方關係式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 註：$(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$，$(\cos\theta)^2=\cos^2\theta$

(3)餘角關係式：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$



◎商數關係

例 3.1：設 θ 為銳角，已知 $\sin\theta=0.6$，$\cos\theta=0.8$，試求 $\tan\theta$ 的值=_____

◎平方關係

例 3.2：試求下列各值：

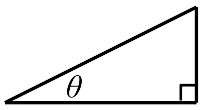
(1) $\sin^2 37^\circ+\cos^2 37^\circ=$______ (2) $1-\cos^2 30^\circ$

◎餘角關係

例 3.3：請在空格內填入適當角度：

(1) $\sin 36^\circ=\sin(90^\circ-\quad)=\cos(\quad)$ (2) $\cos 23^\circ=\cos(90^\circ-\quad)=\sin(\quad)$

例 3.4：已知 $0°<\theta<90°$，且 $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，試求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值



重點 4：三角(比)函數的恆等式

1. $\underline{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1+2\sin\theta\cos\theta}$

   $\underline{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1-2\sin\theta\cos\theta}$

2. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

   $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

3. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ 或 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

4. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

5. $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

例 4.1：已知 $0°<\theta<90°$，試證：$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

例 4.2：已知 $0°<\theta<90°$，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，試求下列各值：

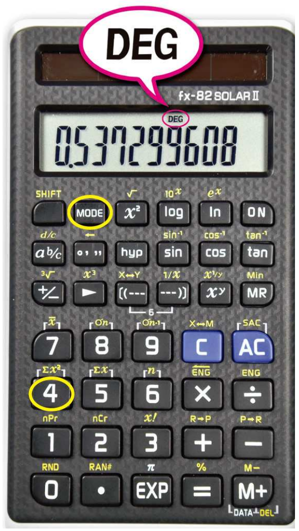
(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$ (3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

重點 5：利用計算機求三角比與角度

1.利用計算機求任意角的三角比注意事項：

(1)角度的測量有「度」與「弧度」這兩種不同的單位

(2)計算機一般預設為 DEG 模式，代表角度是以「度」為單位，在計算三角比時，要先注意計算機螢幕上是否顯示為 DEG，如右圖



註：轉換模式時，先按 MODE，4

2.操作方式：(以計算機使用手冊或說明書為準)

(1)求 sin 32.5°的值：依序按 3，2，•，5，sin

即得 sin 32.5°的近似值為 0.537299608

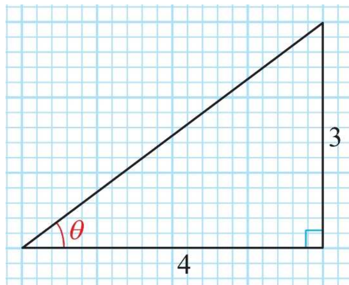
(2)已知 tan θ ＝0.75，求 θ 的大小

依序按 0，•，7，5，SHIFT，$\tan^{-1}$，得 θ 約為 36.86989765°

註：1 度等分為 60 分，記為 1°＝60′、1 分等分為 60 秒，記為 1′＝60″

3.利用量角器來求角 θ 的近似值

已知 $\tan\theta = 0.75 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\theta\text{的鄰邊長}}$，求 θ 的大小



(1)在方格紙上，作一個兩股長為 3，4 的直角三角形，如右圖

(2)利用量角器實際測量 θ 的大小，可得 $\theta \approx 37°$

例 5.1：試利用計算機，分別求 cos 40°與 tan 40°的值。(四捨五入取到小數點後第四位)

cos 40°＝

tan 40°＝

重點 6：銳角三角比的應用與簡易測量

1.意義：運用三角比之定義，計算三角函數之值，並作簡易量測

2.常用測量的名詞

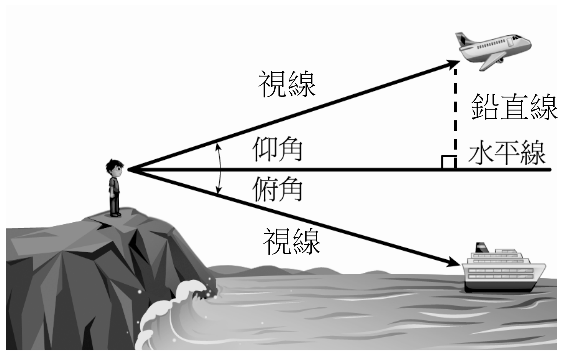
(1)鉛垂線：物體與地心的連線稱做鉛垂線

(2)水平線：和鉛垂線垂直的線稱為水平線

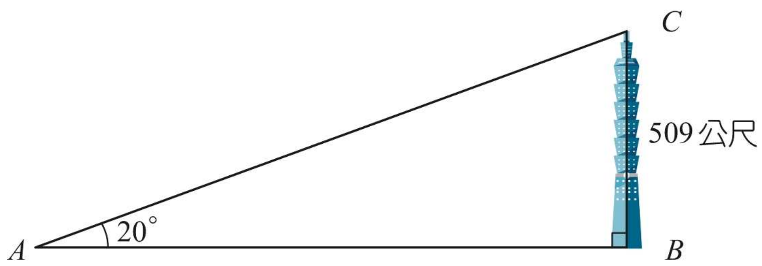
(3)視線(觀物線)：觀測者眼睛與目標物觀測點的直線

(4)仰角：觀測高處目標時，視線與水平線間的夾角

(5)俯角：觀測低處目標時，視線與水平線間的夾角



例 6.1：小珊站在臺北 101 大樓附近的 A 處，測出樓頂 C 的仰角為 20°。小珊在網路上查到臺北 101 大樓 $\overline{BC}$ 的高度約為 509 公尺，如圖所示。請問小珊與大樓的距離為多少公尺？(四捨五入取到整數位)



重點 7：銳角三角函數值之遞增、遞減性質

性質：當角度由 0°增大為 90°時：

(1)正弦函數值由 sin 0°遞增為 sin 90°，亦即函數值由 0 遞增為 1

(2)餘弦函數值由 cos 0°遞減為 cos 90°，亦即函數值由 1 遞減為 0

(3)正切函數值由 tan 0°遞增至 tan 45°，再增為 tan 90°，亦即函數值由 0 遞增至 1，再增為∞(無限大)

註：當 $0°<\theta<90°$時

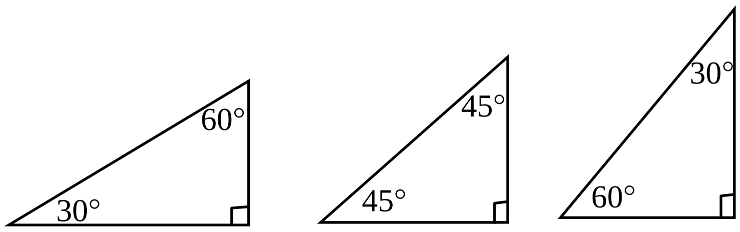
(1)正弦函數 $\sin\theta$ 值隨 θ 增加而增加，稱 $\sin\theta$ 為「**遞增函數**」

(2)餘弦函數 $\cos\theta$ 值隨 θ 增加而增加，稱 $\cos\theta$ 為「**遞減函數**」

(3)正切函數 $\tan\theta$ 值隨 θ 增加而增加，稱 $\tan\theta$ 為「**遞增函數**」

例 7.1：試完成下列表格：

θ / 三角比	30°	45°	60°
$\sin\theta$			
$\cos\theta$			
$\tan\theta$			



性質：當銳角 θ 的度數逐漸變大時，則

(1) $\sin\theta$ 值也跟著逐漸變_____

(2) $\cos\theta$ 值跟著逐漸變_____

(3) $\tan\theta$ 值也跟著逐漸變_____

例 7.2：試比較下列各組函數值之大小關係：

(1) sin 50°____sin 40°　(2) cos 50°____cos 40°　(3) sin 50°____cos 50°

(4) sin 70°____ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(5) cos 70°____ $\frac{1}{2}$