Ch 2.2 級數 (series)　　一年____班　座號：____　姓名：

**重點 1：級數(series)**

1.定義：將數列$\langle a_n\rangle$中$a_1$，$a_2$，$a_3$，⋯，$a_n$的各項依序用「＋」加號連結起來，形如$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，稱為**級數**，其中$a_1$稱為此級數的首項(第一項)，⋯，$a_n$稱為此級數的第 $n$ 項(有限級數的末項)

2.表示法：

一般以$S_n$表示級數的前 $n$ 項和(或稱前 $n$ 項的部分和)，即$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

註：有限級數表示為$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$　　($a_1$稱為首項(第一項)，$a_n$稱為第 $n$ 項(末項))

無限級數表示為$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　　($a_1$稱為首項(第一項)，$a_n$稱為第 $n$ 項)

例 1.1：試寫出數列$\langle n^2\rangle$所形成的級數，並求此級數的前 5 項和

**重點 2：等差級數(arithmetic series)**

1.定義：若數列$\langle a_n\rangle$：$a_1$，$a_2$，$a_3$，⋯，$a_n$為**等差數列**，則$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$稱為**等差級數**的前 $n$ 項和

2.數學表示：

設等差數列$\langle a_n\rangle$的首數為$a_1$，公差為 $d$

$\Rightarrow$數列$\langle a_n\rangle$：$a_1$，$a_2$，$a_3$，⋯，$a_n$ 或 $a_1$，$a_1+d$，$a_1+2d$，⋯⋯，$a_1+(n-1)d$

$\Rightarrow$級數$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$

3.等差級數前 $n$ 項和**公式**：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

4.若 $a$，$b$，$c$ 成等差數列，則 $b$ 為其等差中項(算數中項)，且 $b=\dfrac{a+c}{2}$，又 $a+b+c=3b$

若 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$ 成等差數列，則 $c$ 為其等差中項，且 $c=\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{a+e}{2}$，又 $a+b+c+d+e=5c$

例 2.1：試求下列等差級數的和：

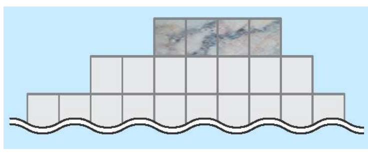
(1) $1+3+5+\cdots+19$　　(2) $100+97+94+\cdots+31$

例 2.2：試求等差級數 $1+2+3+\cdots+n$ 的和

例 2.3：某建築物外牆側面共有 40 層，最上面的 3 層如圖所示，每一小方塊代表面積為一平方公尺的正方形；每往下一層時，左方多兩塊小方塊、右方多一塊小方塊。

建商要用每塊面積為一平方公尺的正方形大理石板覆蓋外牆。

請問建商要準備多少塊大理石板？



重點 3：等比級數(geometric series)

1.定義：若數列$\langle a_n \rangle$：$a_1$，$a_2$，$a_3$，⋯，$a_n$為等比數列，則$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$稱為**等比級數**的前 $n$ 項和

2.數學表示：

設等比數列$\langle a_n \rangle$的首數為$a_1 \neq 0$，公比為 $r \neq 0$

$\Rightarrow$數列$\langle a_n \rangle$：$a_1$，$a_1 r$，$a_1 r^2$，⋯⋯，$a_1 r^{n-1}$

$\Rightarrow$級數$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots\cdots+a_1r^{n-1}$

3.等比級數求和**公式**：$S_n=\begin{cases} na_1 & \text{, 當 } r=1 \text{ 時} \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} & \text{, 當 } r\neq 1 \text{ 時} \end{cases}$　（註：$\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$）

4.若 $a$，$b$，$c$ 成等比數列，則 $b$ 稱為其**等比中項(幾何中項)**，且$b^2=ac$

例 3.1：試求下列等比級數的和：

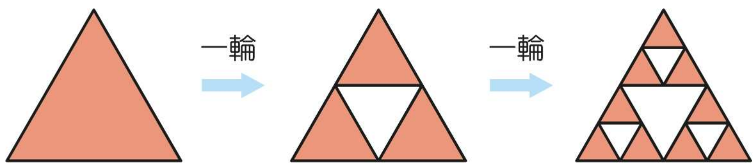
(1) $3+6+12+\cdots+3072$　　(2) $54-36+24+\cdots-\dfrac{64}{9}$　　(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

例 3.2：一個朝上著色的正三角形邊長為 1 公分。在每一輪中，連接著色的正三角形之三邊中點形成新的圖形。

如圖為進行兩輪後的結果。

(1)依此規律進行四輪後，試求所有著色的正三角形個數

(2)承(1)，試求所有線段的長度和




重點 4：常用級數的和公式

公式一：$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

公式二：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　　(平方和的級數公式)

公式三：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$　　(立方和的級數公式)

註：利用$\Sigma$的級數求和運算，另專節討論

推演公式：(1) $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(2) $1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

例 4.1：試求下列各級數的和：

(1) $1+2+3+\cdots+66$　(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$　(3) $6^3+7^3+8^3+\cdots+18^3$

例 4.2：有一個電腦螢幕保護程式如圖所示，第一秒出現一個 1×3 的色塊，每過一秒，
在螢幕其他地方出現新的色塊，但長與寬都增加 1(因此第二秒的色塊為 2×4)
這些色塊都不重疊。試求在前 10 秒的十個色塊之面積

重點 5：單利、複利計息

1.單利計息：永遠以當初存入的本金計算利息，這樣的計息方式稱為**單利**計息

2.複利計息：若每一期產生的利息會滾入下一次計算的本金中以計算利息，不斷地利滾利，這種計息方式稱為**複利**計息

3.計息公式：

設本金為 $a$，每期利率為 $r$

(1)若以單利計息，每一期的利息都是 $ar$。經過 $n$ 期後，本利和為 $a+ar\cdot n=a(1+nr)$

(2)若以複利計息，第一期後的本利和是 $a(1+r)$，第二期開始的本金即為第一期後的本利和 $a(1+r)$
即第二期後的本利和為此值的$(1+r)$倍$=a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$，經過 $n$ 期後，本利和為 $a(1+r)^n$

例 5.1：小芬計畫每個月月初存入銀行 10000 元，以月利率 0.2 %複利孳息。則 5 年後小芬可以存到多少錢？
(四捨五入取到百位，已知 $(1.002)^{60}\approx 1.12736$)