單元 5　指數函數(exponential function)　　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：指數函數的圖形與性質

1.定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，x 是任意實數，設函數 $f(x)=a^x$，則稱 $f(x)$為「以 a 為底數的**指數函數**」

註：當 $a=1$ 時，$f(x)=1^x=1$ 是常數函數(不是指數函數)，其圖形為一**水平線**

2.指數函數 $f(x)=y=a^x$ $(a>0，a\neq 1)$圖形的特性：

(1)圖形恆在 x 軸上方，則對任意實數 x，$y=a^x$的值恆正，即 $f(x)>0$

(2)圖形必過點(0，1)，且為**凹口向上**的圖形

(3)以 x 軸為漸近線

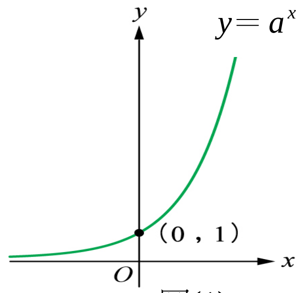
(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$為**嚴格遞增函數**，圖形(1)由左往右逐漸上升

當 $0<a<1$ 時，$y=a^x$為**嚴格遞減函數**，圖形(2)由左往右逐漸下降

(5)圖形與鉛直線 $x=h$ 恰交一點

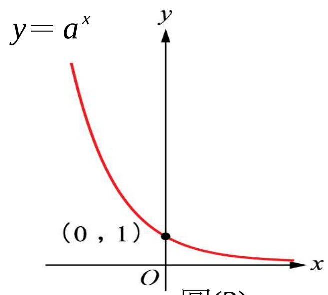
在 x 軸上方，圖形與水平線 $y=k$ 都恰交一點

$a>1$



圖(1)

$0<a<1$



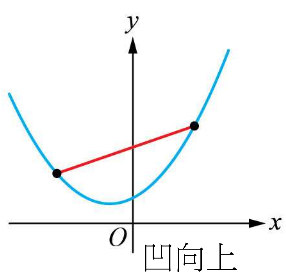
圖(2)

3.圖形的**凹向性**

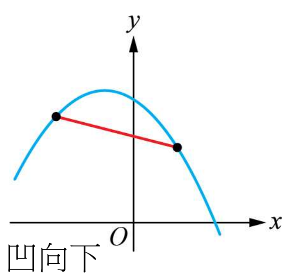
定義：(1)函數圖形上任兩點連線段都在函數**圖形上方**時，稱此函數圖形為**凹向上**

(2)函數圖形上任兩點連線段都在函數**圖形下方**時，稱此函數圖形為**凹向下**

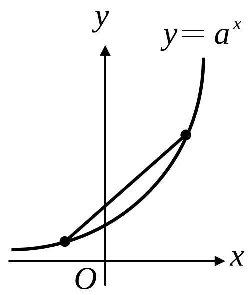
註：指數函數 $f(x)=y=a^x$的圖形都是凹向上



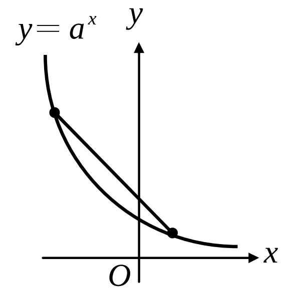
凹向上



凹向下



$a>1$



$0<a<1$

◎指數函數值

例 1.1：設 $f(x)=2^x$，試求下列各函數值：

(1) $f(10)=$_____　　(2) $f(-3)=$_____　　(3)若 $f(a)=7$，$f(b)=9$，則 $f(a+b)=$_____

Ex1.1：設 $f(x)=3^x$，試求下列各函數值：

(1) $f(5)=$_____　　(2) $f(-3)=$_____　　(3)若 $f(a)=30$，$f(b)=18$，則 $f(a+b)=$____

◎底數＞1，遞增函數

例 1.2：利用描點法描繪函數 $y=2^x$ 的圖形。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$							

性質：

(1)圖形恆在__________，

則對任意實數 x，$y=a^x$ 的值________，即 $f(x)$____0

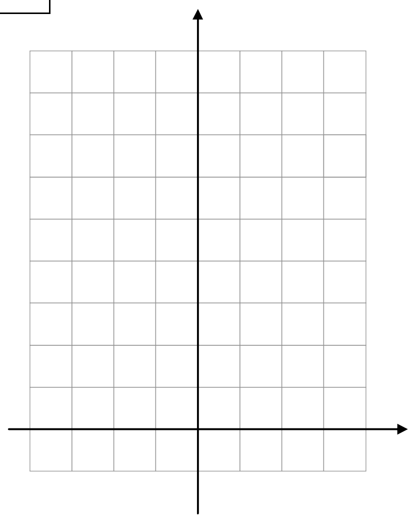
(2)圖形必過點________，且為凹口______的圖形

(3)以_______為漸近線

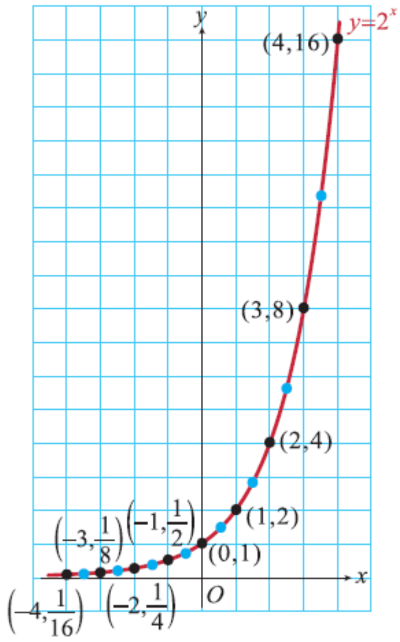
(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格_________

(5)圖形與鉛直線________恰交於_______

在_______上方，圖形與水平線________都恰交______



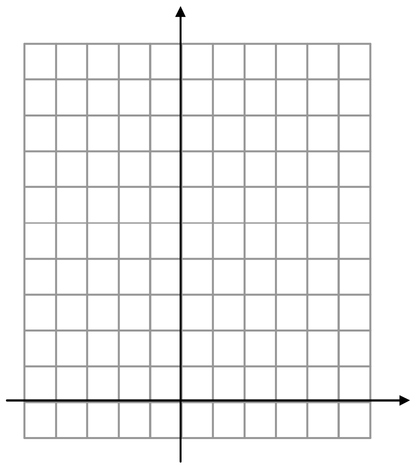
參考



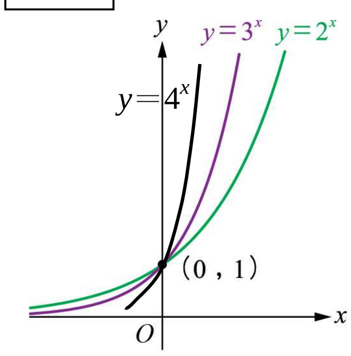
Ex1.2：試在同一坐標平面上，利用描點法描繪函數 $y=2^x$，$y=3^x$，$y=4^x$ 的圖形

性質：底數越_____，圖形越靠近______

x	-2	-1	0	1	2
$y=2^x$					
$y=3^x$					
$y=4^x$					



參考



◎0＜底數＜1，遞減函數

例 1.3：利用描點法描繪函數 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$							

性質：

(1)圖形恆在__________，

則對任意實數 x，$y=a^x$ 的值________，即 $f(x)$____0

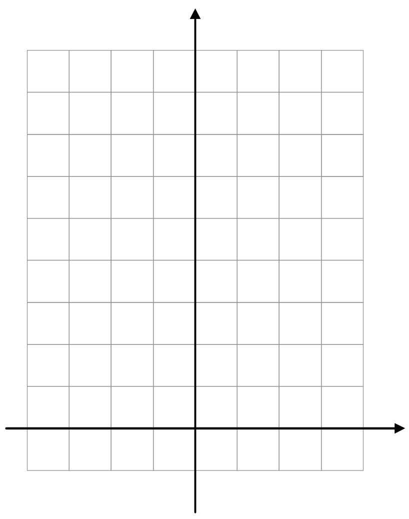
(2)圖形必過點________，且為凹口______的圖形

(3)以_______為漸近線

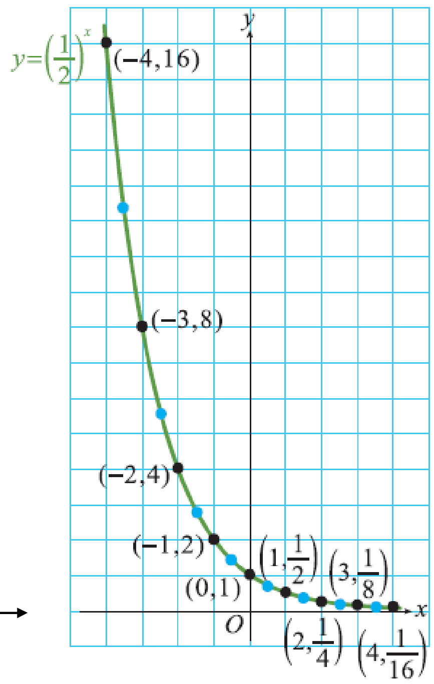
(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格_________

(5)圖形與鉛直線________恰交於_______

在_______上方，圖形與水平線________都恰交______



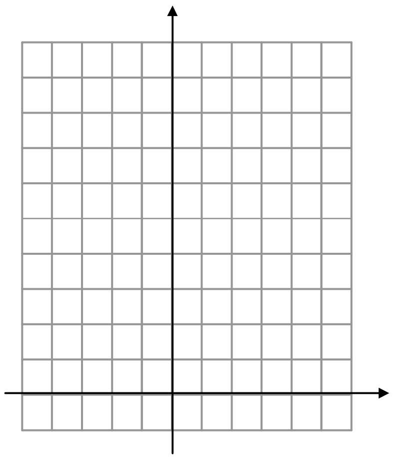
參考



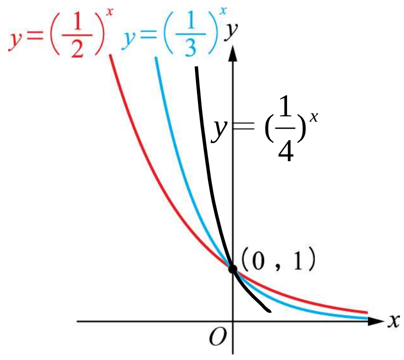
Ex1.3：試在同一坐標平面上，利用描點法描繪函數 $y=(\frac{1}{2})^x$，$y=(\frac{1}{3})^x$，$y=(\frac{1}{4})^x$ 的圖形

性質：底數越______，圖形越靠近______

x	-2	-1	0	1	2
$y=(\frac{1}{2})^x$					
$y=(\frac{1}{3})^x$					
$y=(\frac{1}{4})^x$					



參考



重點 2：指數函數圖形的遞增、遞減性質

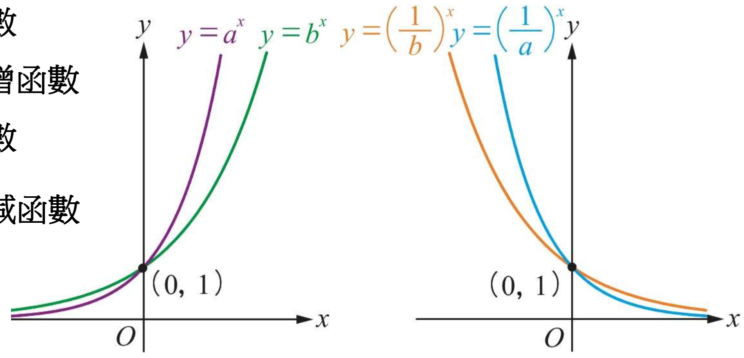
1.意義：對於函數 $f(x)$ 而言：

(1)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)\leq f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**遞增函數**

(2)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)<f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**嚴格遞增函數**

(3)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)\geq f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**遞減函數**

(4)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)>f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**嚴格遞減函數**



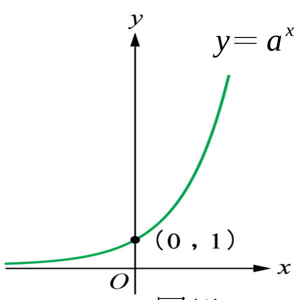
註：**遞增函數**：變數 x 愈大時，函數值 $y=f(x)$ 愈大

　　遞減函數：變數 x 愈大時，函數值 $y=f(x)$ 愈小

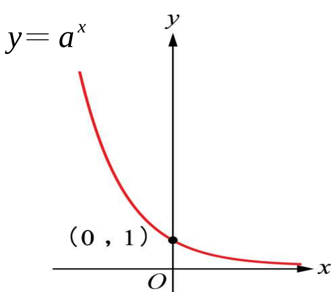
2.指數函數 $f(x)=y=a^x$ 的圖形而言：

(1)若 $a>1$ 時，$f(x)=a^x$ 的圖形是一個由左而右逐漸上升，為一個**嚴格遞增函數**，如圖(1)

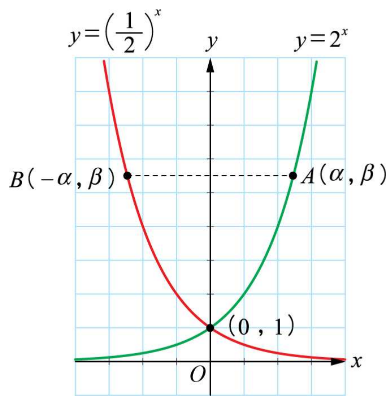
(2)若 $0<a<1$ 時，$f(x)=a^x$ 的圖形是一個由左而右逐漸下降，為一個**嚴格遞減函數**，如圖(2)



圖(1)



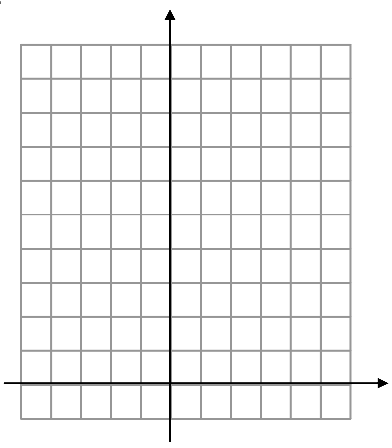
圖(2)



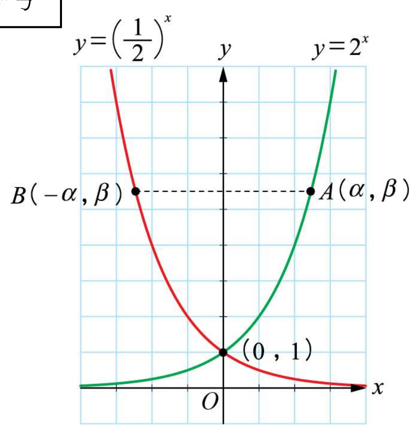
註：兩圖形對稱 y 軸

例 2.1：試在同一個坐標平面上作 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形。

性質：圖形對稱於______

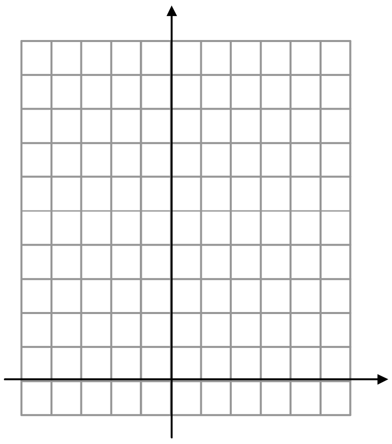


參考

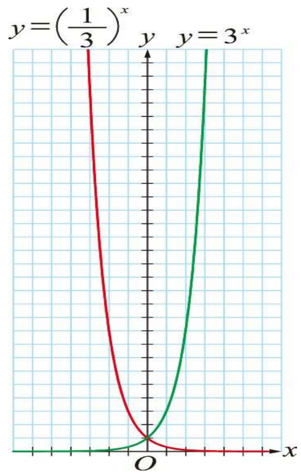


Ex2.1：試在同一個坐標平面上作 $y=3^x$ 與 $y=(\frac{1}{3})^x$ 兩函數的圖形。

性質：圖形對稱於______



參考

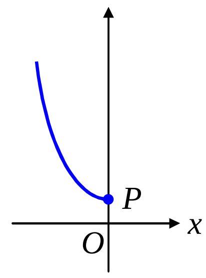


例 2.2：已知函數 $f(x)$的圖形與 $g(x)=(\frac{1}{5})^x$ 的圖形對稱於 y 軸，求函數 $f(x)$

Ex2.2：右圖為 $y=a^x$ 的部分圖形，選出正確的選項：

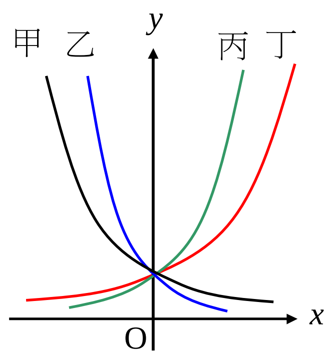
(1) $\overline{OP}=1$　　(2) $0<a<1$　　(3) $y=a^x$ 的圖形與每一條水平線均相交

(4)若(100，k)為 $y=a^x$ 函數上一點，則 $k>0$



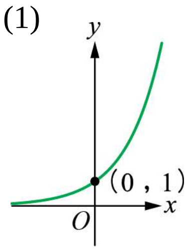
例 2.3：如圖，四條曲線分別為 $y=2^x$，$y=4^x$，$y=(\frac{1}{7})^x$，$y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形

試判斷哪個圖形代表哪個函數

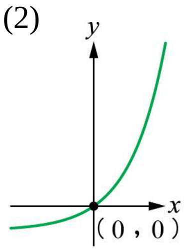


Ex2.3：設 $a>0$ 且 $a\neq1$，則下列各圖形中，哪些可能是指數函數 $y=a^x$ 的部分圖形？

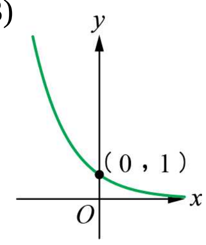
(1)



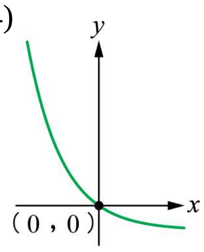
(2)



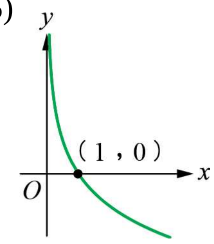
(3)



(4)



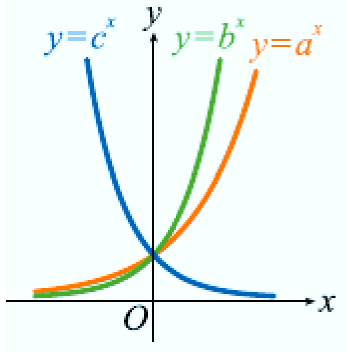
(5)



Ex2.31：設 $a>0$，若函數 $y=a^{x-2}+3$ 的圖形恆通過定點 P，求 P 點坐標

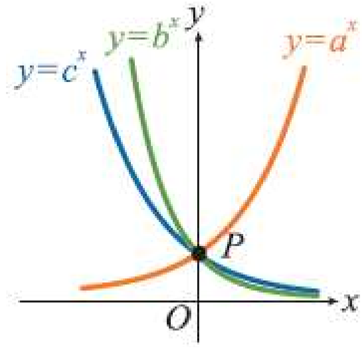
例 2.4：指數函數 $y=a^x$、$y=b^x$、$y=c^x$ 的圖形如右所示，選出下列中正確的選項：

(1) $a>1$　(2) $b>1$　(3) $c>1$　(4) $b>a$



Ex2.4：指數函數 $y=a^x$、$y=b^x$、$y=c^x$ 的圖形如右所示，其中 $y=a^x$ 與 $y=c^x$ 的圖形對稱於 y 軸，選出下列中正確的選項：

(1) $a>1$　(2) $\overline{OP}=1$　(3) $ac=1$　(4) $c>b$

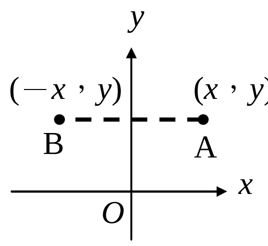


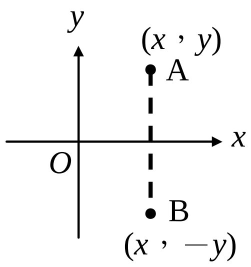
重點 3：指數函數圖形的對稱性質

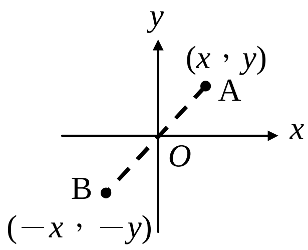
1.定義：點(x，y)為函數 $f(x)$上之點，點($-x$，y)為函數 g(x)上之點，則函數 $f(x)$、g(x)的圖形對稱於 y 軸

點(x，y)為函數 $f(x)$上之點，點(x，$-y$)為函數 g(x)上之點，則函數 $f(x)$、g(x)的圖形對稱於 x 軸

點(x，y)為函數 $f(x)$上之點，點($-x$，$-y$)為函數 g(x)上之點，則函數 $f(x)$、g(x)的圖形對稱於原點







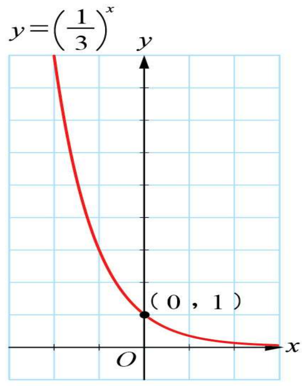
2.指數函數圖形的對稱性

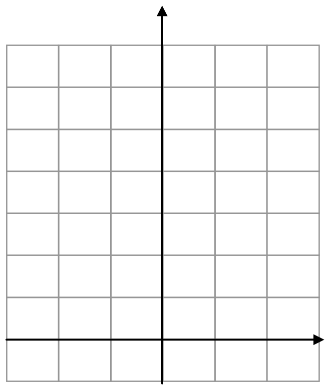
若點 A(α，β)在 $y=2^x$ 的圖形上，而點 B($-\alpha$，β)在 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形上，則稱 A，B 兩點對稱於 y 軸

例 3.1：試參考**例 2.1** 說明 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 兩函數的圖形對稱於 y 軸

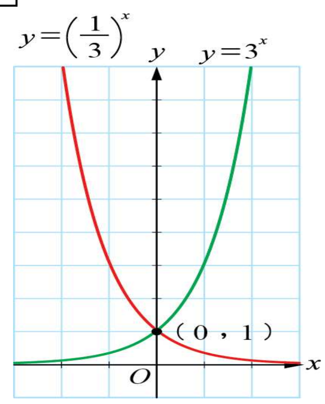
Ex3.1：試參考 **Ex2.1** 說明 $y=3^x$ 與 $y=(\frac{1}{3})^x$ 兩函數的圖形對稱於 y 軸

例 3.2：已知函數 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形如下圖，試描繪出函數 $y=3^x$ 的圖形

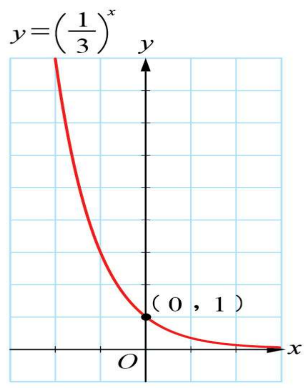


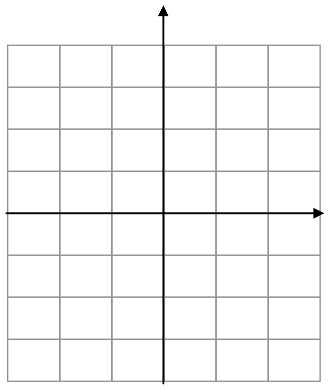


參考

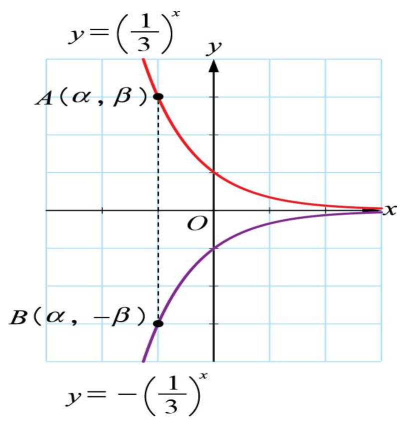


Ex3.2：已知函數 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形如圖，試描繪出函數 $y=-(\frac{1}{3})^x$ 的圖形





參考



Ex3.21：(1)函數 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形對稱於_____

(2)與函數 $y=3^x$ 的圖形對稱於 x 軸的函數為______

(3)與函數 $y=-3^x$ 的圖形對稱於原點的方程式為______

重點4：指數函數圖形的平移

意義：圖形的平移包含水平、鉛直兩種平移

1.水平平移：指數函數 $y=a^x$ 圖形，

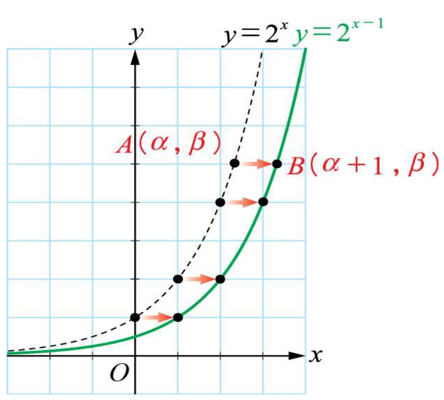
向右平移 h 單位後得 $y=a^{x-h}$

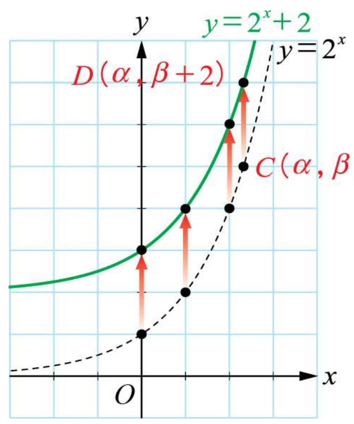
向左平移 h 單位後得 $y=a^{x+h}$

2.鉛直平移：指數函數 $y=a^x$ 圖形，

向上平移 k 單位後得 $y=a^x+k$

向下平移 k 單位後得 $y=a^x-k$

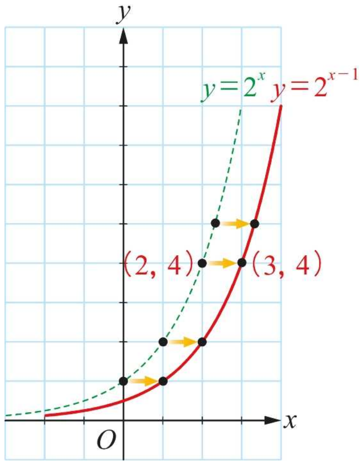


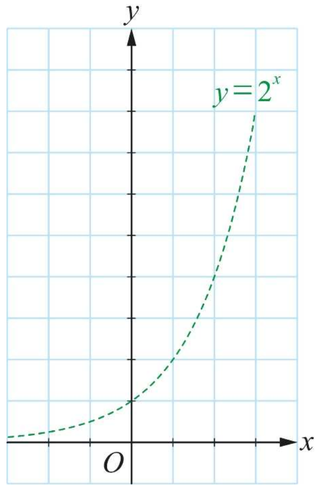


例 4.1：試利用 $y=2^x$ 的圖形，描繪出下列函數的圖形：(1) $y=2^{x-1}$　　(2) $y=2^x+2$

解：(1) $y=2^{x-1}$ 由 $y=2^x$ 的圖形向_____平移____單位

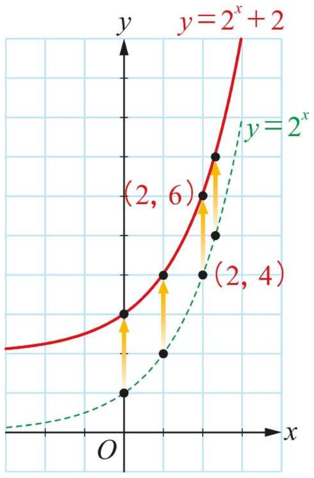
參考

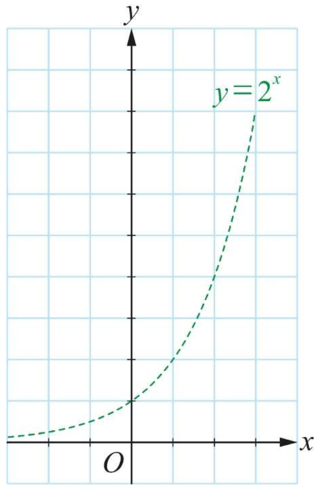




(2) $y=2^x+2$ 由 $y=2^x$ 的圖形向_____平移_____單位

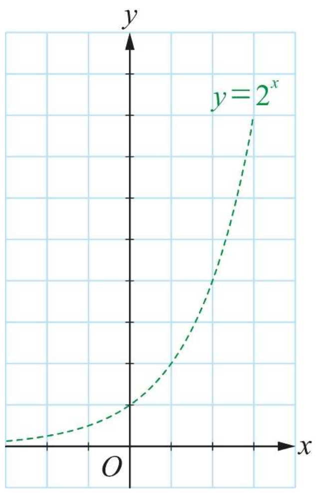
參考



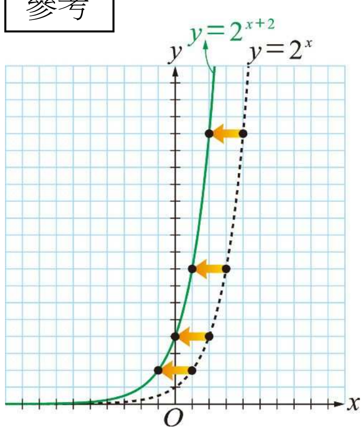


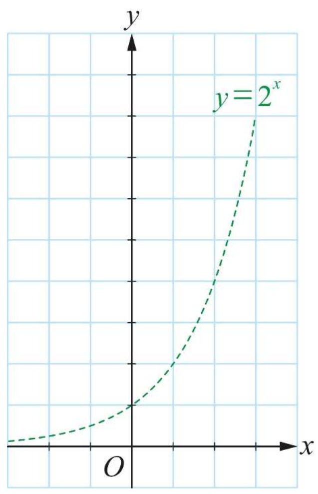
Ex4.1：試利用 $y=2^x$ 的圖形，描繪出下列函數的圖形：(1) $y=2^{x+2}$　　(2) $y=2^x-3$

解：(1) $y=2^{x+2}$ 由 $y=2^x$ 的圖形向_____平移____單位　　(2) $y=2^x-3$ 由 $y=2^x$ 的圖形向____平移____單位

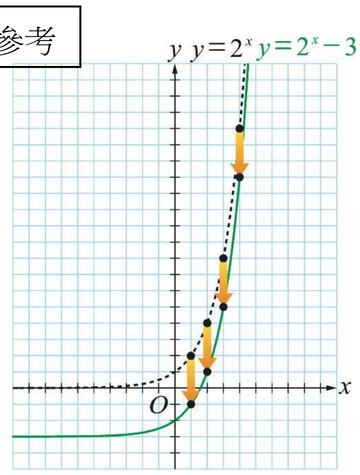


參考





參考



例 4.2：將函數 $y=2^x$ 的圖形，先向左平移 3 單位，再向上平移 5 單位之後圖形的函數為_______

Ex4.2：將函數 $y=2^x$ 的圖形，先向右平移 5 單位，再向下平移 2 單位之後圖形的函數為_______

Ex4.21：將函數 $y=3^x$ 的圖形，先向右平移 h 單位，再向下平移 k 單位之後圖形的函數為 $y=3^{x-2}-5$，求數對$(h，k)$

重點 5：指數方程式

1.定義：當方程式的未知數出現在**指數位置**時，稱為指數方程式

2.解指數方程式：

(1)化為相同底數的指數式。當 $a^x = a^y$ 時，則 $x=y$

(2)常數與指數式分開表示為指數標準形式

(3)指數函數 $f(x)=a^x>0$，檢查解是否正確？

註：解指數方程式 $y=f(x)=a^x$，乃利用函數 $f(x)$ 在 x 軸上方恰與水平直線 $y=h$ 交於一點之性質

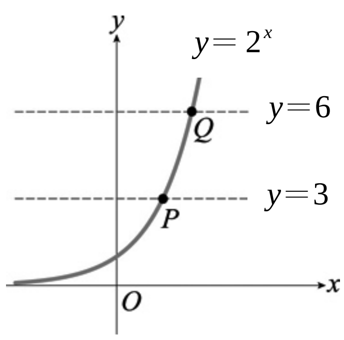
例 5.1：試解下列方程式：

(1) $3^x=3\sqrt{3}$　　(2) $(\sqrt{3})^{3x+1}=27\sqrt{3}$　　(3) $9^x+3^{x+1}-18=0$

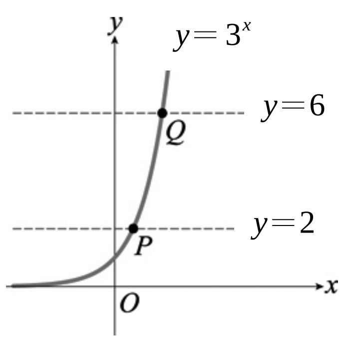
Ex5.1：試解下列方程式：

(1) $2^{\frac{x}{30}}=1024$　　(2) $2^{3x^2}=4\times 2^{5x}$　　(3) $4^{x+1}-9\times 2^x+2=0$

例 5.2：右圖為 $y=2^x$ 的圖形。設 P，Q 分別為直線 $y=3$，$y=6$ 與 $y=2^x$ 的交點，求 $\overline{PQ}$ 的長



Ex5.2：右圖為 $y=3^x$ 的圖形。設 P，Q 分別為直線 $y=2$，$y=6$ 與 $y=3^x$ 的交點，求 $\overline{PQ}$ 的長



例 5.3：求方程式 $2^x=x+1$ 有多少個實數解？

Ex5.3：求方程式 $(\frac{1}{2})^x=x$ 有多少個實數解？

例 5.4：求方程式 $2^{-x}=2-x$ 有多少個實數解？

Ex5.4：求方程式 $2^{-|x|}=x^2$ 有多少個實數解？

Ex5.41：求方程式 $2^{x}=x^2$ 有多少個實數解？

重點 6：指數不等式

1.意義：指數函數 $f(x)\neq 0$ 稱為**指數不等式**，包含 $f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$ 等四種為指數不等式

2.性質：同底數之指數的大小比較：

(1)當 $a>1$ 時，指數函數為**遞增函數**，

則若 $\alpha<\beta \Leftrightarrow a^{\alpha}<a^{\beta}$，如圖 1

(2)當 $0<a<1$ 時，指數函數為**遞減函數**，

則若 $\alpha<\beta \Leftrightarrow a^{\alpha}>a^{\beta}$，如圖 2

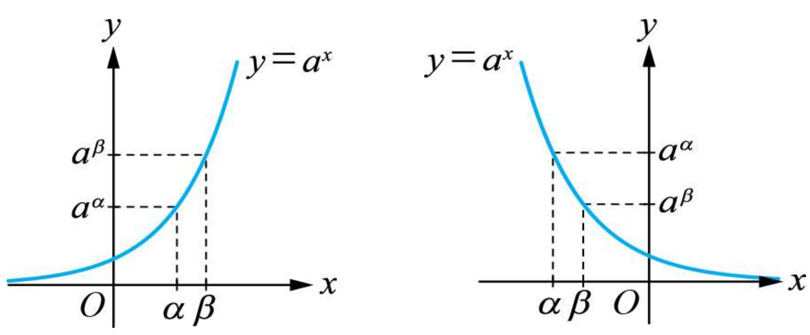


圖 1　　圖 2

註：一般原則是先**換成底數相同**或**換成指數相同**

3.最大值與最小值：

利用**配方法**求指數函數之最大值與最小值

◎遞增指數函數之比較大小

例 6.1：觀察函數 $y=2^x$ 的圖形，比較 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt[3]{4}$，$c=\sqrt[4]{8}$ 三數的大小關係

Ex6.1：比較 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\sqrt[3]{4}$，$c=1$ 三數的大小關係

◎遞減指數函數之比較大小

例 6.2：觀察函數 $y=(0.3)^x$ 的圖形，比較 $a=\sqrt{0.3}$，$b=(0.09)^{0.5}$，$c=(\frac{10}{3})^{-\frac{3}{2}}$ 三數的大小關係

Ex6.2：比較 $a=\sqrt{0.3}$，$b=(0.09)^{0.3}$，$c=(\frac{10}{3})^{-0.4}$ 三數的大小關係

例 6.3：試比較下列各組 a，b，c 的大小關係：

(1) $a=2^{40}$，$b=3^{30}$，$c=5^{20}$　　(2) $a=(\frac{1}{2})^{40}$，$b=(\frac{1}{3})^{30}$，$c=(\frac{1}{5})^{20}$

Ex6.3：下列哪一個數最小？

(1) $(0.9)^{-3.5}$　(2) $(0.9)^{-2.5}$　(3) $(0.9)^{-1.5}$　(4) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$　(5) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$

Ex6.31：下列哪一個數最小？

(1) $2^{-3.5}$　(2) $2^{-1.5}$　(3) $2^{-0.5}$　(4) $2^{1.5}$　(5) $2^{3.5}$

◎解遞增指數函數之不等式

例 6.4：試解下列不等式：

(1) $3^{2x+1}>\frac{1}{3}$　　(2) $4^x-2^{x+1}-8>0$

Ex6.4：試解下列不等式：

(1) $27^{2x+1}<9^{x+2}$　　(2) $2^{2x+2}-9\cdot 2^{x}+2<0$

Ex6.41：試解下列不等式：

(1) $10^{2x-1}>10^{7}$　　(2) $3^{5x+1}<9^{3}$　　(3) $\frac{1}{2}<2^{2x+1}<8$

◎解遞減指數函數之不等式

例 6.5：試解下列不等式：

(1) $(0.7)^{x^2}>(0.49)^{x}$　　(2) $2^{1-2x}-9\times 2^{-x}+4\leq 0$

Ex6.5：試解下列不等式：

(1) $(\frac{1}{2})^{x-3}>(\frac{1}{4})^{x+1}$　　(2) $(\frac{1}{4})^{x}+2(\frac{1}{2})^{x}-8\geq 0$

Ex6.51：試解下列不等式：

(1) $(0.5)^{x^2+x}>(0.5)^{6}$　　(2) $(0.1)^{x^2-2x}<0.001$

◎最大值與最小值

例 6.6：設函數 $f(x)=4^{x}-2\cdot 2^{x+3}+100$，若當 $x=a$ 時，$f(x)$有最小值 m，則數對$(a，m)=$_____

Ex6.6：設函數 $f(x)=9^{x}-18\cdot3^{x-1}+6$，若當 $x=a$ 時，$f(x)$有最小值 m，則數對$(a，m)=$_____

◎限制範圍

例 6.7：設 $-1\le x\le2$，若函數 $f(x)=4^{x}-2^{x+1}+3$ 有最大值 M，最小值 m，則數對(M，m)=_____

Ex6.7：設 $-2\le x\le2$，若函數 $f(x)=9^{x}-3^{x+1}$，當 $x=a$ 時，$f(x)$有最大值 M，則數對$(a，M)=$_____

例 6.8：設函數 $f(x)=5(3^{x}+3^{-x})-2(9^{x}+9^{-x})$，$x\in$R，則：

(1)若令 $k=3^{x}+3^{-x}$，求 k 的最小值

(2)將函數 $f(x)$表示為 k 的多項式函數，求 $f(x)$的最大值

Ex6.8：設函數 $f(x)=2(4^{x}+4^{-x})-8(2^{x}+2^{-x})+3$，$x\in$R，則：

(1)若令 $k=4^{x}+4^{-x}$，求 k 的範圍

(2)將函數 $f(x)$表示為 k 的多項式函數，求 $f(x)$的最小值

重點 7：指數函數在生活中的應用問題

1.意義：將生活中的問題(如半衰期等)，轉換為數學式後，利用指數函數的運算方式，求得其解

2.常見指數模式：

(1)半衰期：設某放射性物質原重 m，半衰期為 T 單位，則經過 x 單位後，剩下物質重為 $m(\frac{1}{2})^{\frac{x}{T}}$

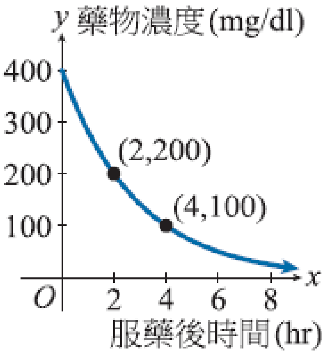
(2)複利計息本利和：設本金為 P，利率為 r %，期數為 n，則本利和＝$P(1+r\%)^n$

單利計息本利和：設本金為 P，利率為 r %，期數為 n，則本利和＝$P(1+n\cdot r\%)$

例 7.1：已知碳 14 的半衰期約為 5700 年，且該骨頭原來碳 14 的數量為 m，問：
該人類死亡 x 年後，碳 14 的數量變為下列哪一個選項？

(1) $x(\frac{1}{2})^{\frac{m}{5700}}$　(2) $m(\frac{1}{2})^{\frac{5700}{x}}$　(3) $m(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5700}}$　(4) $x(\frac{1}{2})^{\frac{5700}{m}}$

Ex7.1：已知藥物在人體血液中的剩餘量隨著時間遞減，且經過 x 小時後，血液中的藥物濃度為指數函數 $f(x)=ma^x$ (毫克／分升)，其中 m，a 是常數，右圖是 $y=f(x)$ 的部分圖形，
則：(1)求 m，a 的值
(2)若人體中的藥物濃度低於 25(毫克／分升)時就必須再進行服藥，
則應每隔多少個小時服藥一次？



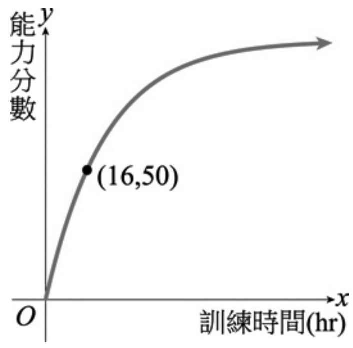
例 7.2：某銀行推出青年創業優惠貸款方案如下：貸款 100 萬元、年利率為 3%、每年計息一次，十年後期滿一次還清本利和。則：

(1)以單利計息，期滿還款時須還多少錢？

(2)以複利計息，期滿還款時須還多少錢？(四捨五入到整數位)

Ex7.2：某銀行推出六年儲蓄專案如下：一次存 100 萬元、年利率為 2.5%、每年計息一次，六年後期滿一次領回本利和。問：六年期滿領回本利和時，複利計息比單利計息多領多少錢？(四捨五入到整數位)

例 7.4：游泳訓練機構統計發現，經過 x 小時的訓練，學員掌握自由式游泳技巧的「能力分數」為函數 $f(x)=100(1-a^x)$，其中 a 是常數。右圖是 $y=f(x)$的部分圖形。當能力分數為 75 時表示此學員可以游完 100 公尺的距離，試問：一名學員應該接受幾小時的訓練，才能游完 100 公尺呢？



Ex7.4：某醫學實驗室作某種酵菌之培養，發現在固定的條件下，所得此種酵菌之重量 $f(x)$與培育時間 x (日)的關係為 $f(x)=a\times b^x$，a，b，x 為實數，$x\geq 0$，若已知開始培育兩天後的重量為 $f(2)=36$(單位)，開始培育四天後的重量為 $f(4)=81$(單位)，則 $f(5)=$______(單位)