Ch 2.1 指數函數及其圖形

二年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：指數函數的圖形與性質

1.定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，x 是任意實數，設函數 $f(x)=a^x$，則稱 $f(x)$為「以 a 為底數的**指數函數**(exponential function)」

註：當 $a=1$ 時，$f(x)=1^x=1$ 是常數函數(不是指數函數)，其圖形為一**水平線**

2.指數函數 $f(x)=y=a^x$ $(a>0，a\neq 1)$圖形的特性：

(1)圖形恆在 x 軸上方，則對任意實數 x，$y=a^x$ 的值恆正，即 $f(x)>0$

即 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，值域為正實數

(2)圖形必過點(0，1)，且為**凹口向上**的圖形

(3)以 x 軸為漸近線

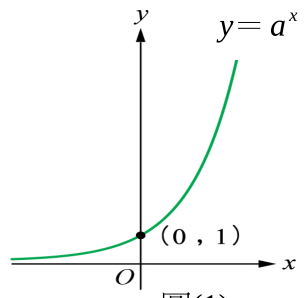
(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為**嚴格遞增函數**，圖形(1)由左往右逐漸上升

當 $0<a<1$ 時，$y=a^x$ 為**嚴格遞減函數**，圖形(2)由左往右逐漸下降

(5)圖形與鉛直線 $x=h$ 恰交一點

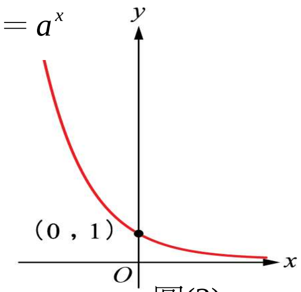
在 x 軸上方，圖形與水平線 $y=k$ 都恰交一點

$a>1$



圖(1)

$0<a<1$



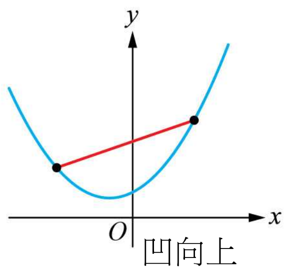
圖(2)

3.圖形的**凹向性**

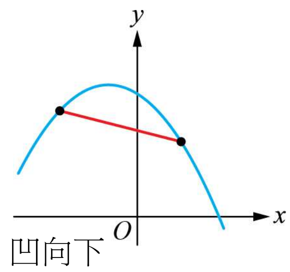
定義：(1)函數圖形上任兩點連線段都在函數**圖形上方**時，稱此函數圖形為**凹向上**

(2)函數圖形上任兩點連線段都在函數**圖形下方**時，稱此函數圖形為**凹向下**

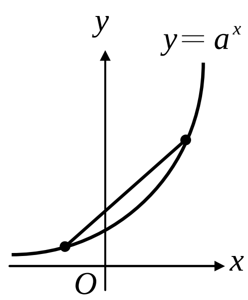
註：指數函數 $f(x)=y=a^x$ 的圖形都是凹向上



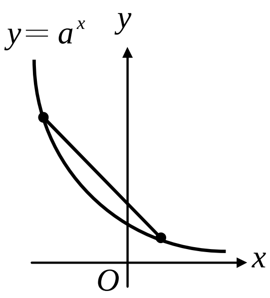
凹向上



凹向下



$a>1$



$0<a<1$

◎指數函數值

例 1.1：設 $f(x)=2^x$，試求下列各函數值：

(1) $f(0)=$_____ (2) $f(-4)=$_____ (3) $f(t)=$_____ (4) $f(x-1)=$_____

例 1.2：利用描點法描繪函數 $y=2^x$ 的圖形

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$							

性質：

(1)圖形恆在__________，

則對任意實數 x，$y=a^x$ 的值________，即 $f(x)$____0

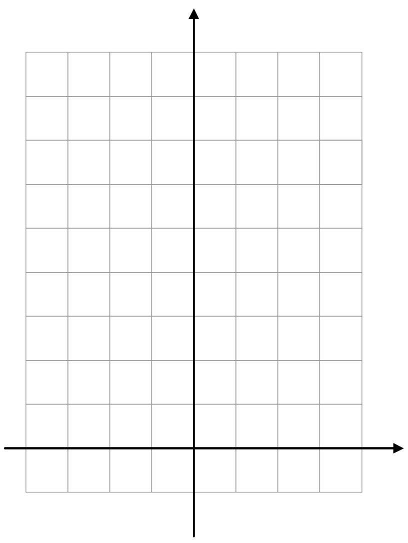
(2)圖形必過點________，且為**凹口**______的圖形

(3)以______為漸近線

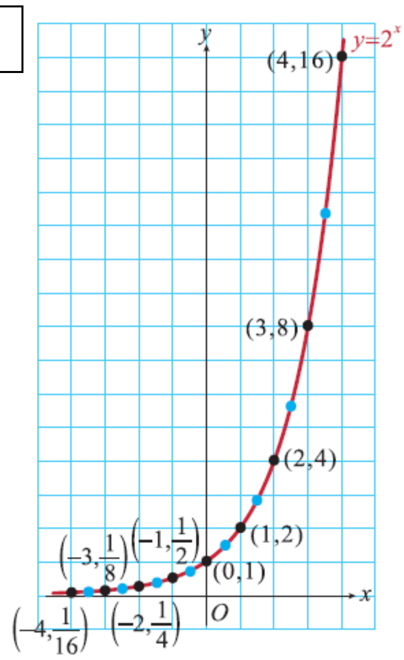
(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為**嚴格**_________

(5)圖形與鉛直線_______恰交於______

在______上方，圖形與水平線_______都恰交_____



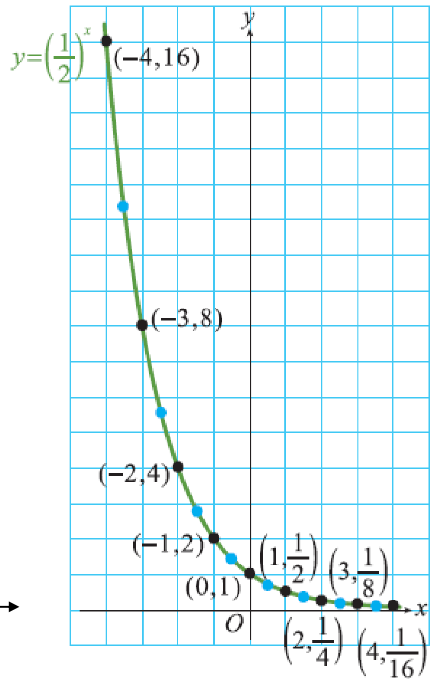
參考



例 1.3：利用描點法描繪函數 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形

參考

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$							



性質：

(1)圖形恆在_________，

則對任意實數 x，$y=a^x$ 的值_______，即 $f(x)$____0

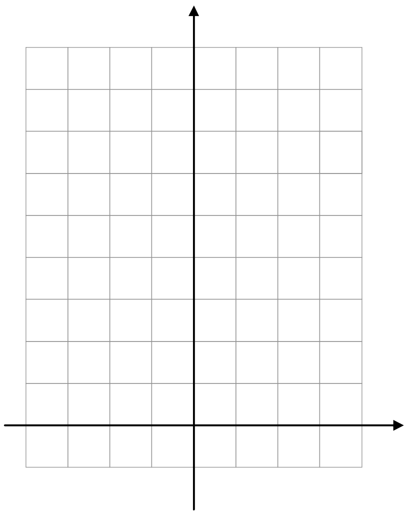
(2)圖形必過點_______，且為凹口______的圖形

(3)以______為漸近線

(4)當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為**嚴格**________

(5)圖形與鉛直線_______恰交於______

在______上方，圖形與水平線_______都恰交_____



重點 2：指數函數圖形的遞增、遞減性質

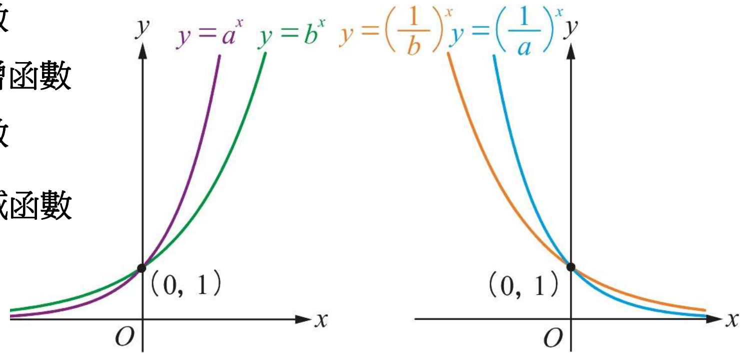
1.意義：對於函數 $f(x)$ 而言：

(1)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)\le f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**遞增函數**

(2)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)<f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**嚴格遞增函數**

(3)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)\ge f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**遞減函數**

(4)對所有的 $\alpha<\beta$，都有 $f(\alpha)>f(\beta)$，就稱 $f(x)$ 為**嚴格遞減函數**



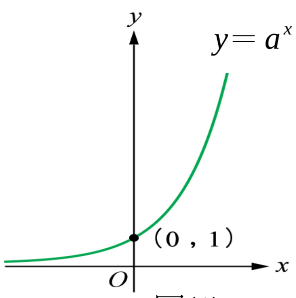
註：**遞增函數**：變數 x 愈大時，函數值 $y=f(x)$ 愈大

遞減函數：變數 x 愈大時，函數值 $y=f(x)$ 愈小

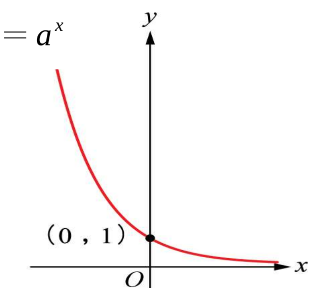
2.指數函數 $f(x)=y=a^x$ 的圖形而言：

(1)若 $a>1$ 時，$f(x)=a^x$ 的圖形是一個**由左而右逐漸上升**，為一個**嚴格遞增函數**，如圖(1)

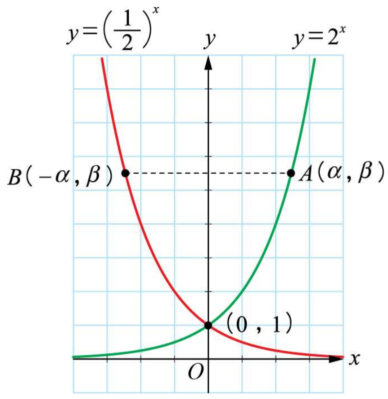
(2)若 $0<a<1$ 時，$f(x)=a^x$ 的圖形是一個**由左而右逐漸下降**，為一個**嚴格遞減函數**，如圖(2)



圖(1)



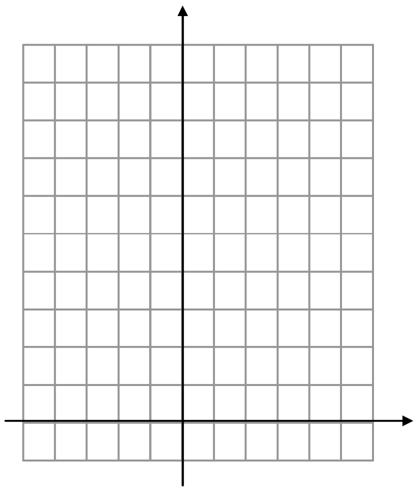
圖(2)



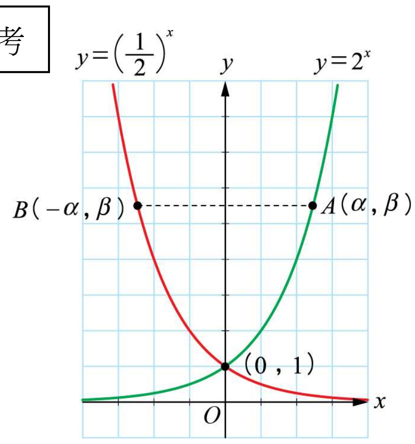
註：兩圖形對稱 y 軸

例 2.1：試在同一個坐標平面上作 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形

性質：圖形對稱於_____

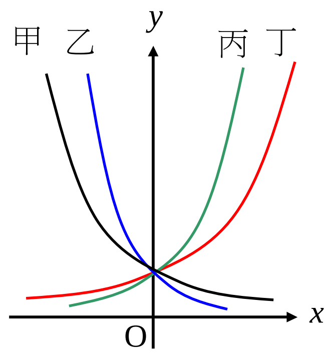


參考



例 2.2：如圖，四條曲線分別為 $y=2^x$，$y=4^x$，$y=(\frac{1}{7})^x$，$y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形

試判斷哪個圖形代表哪個函數



重點 3：指數函數圖形的平移

意義：圖形的平移包含水平、鉛直兩種平移

1.水平平移：指數函數 $y=a^x$ 圖形，

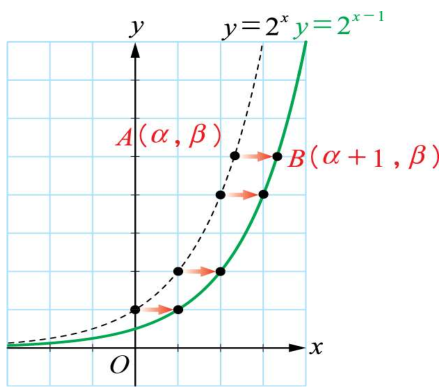
向右平移 h 單位後得 $y=a^{x-h}$

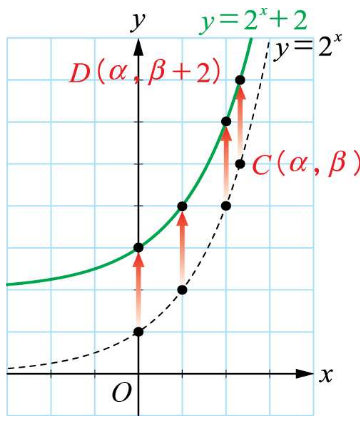
向左平移 h 單位後得 $y=a^{x+h}$

2.鉛直平移：指數函數 $y=a^x$ 圖形，

向上平移 k 單位後得 $y=a^x+k$

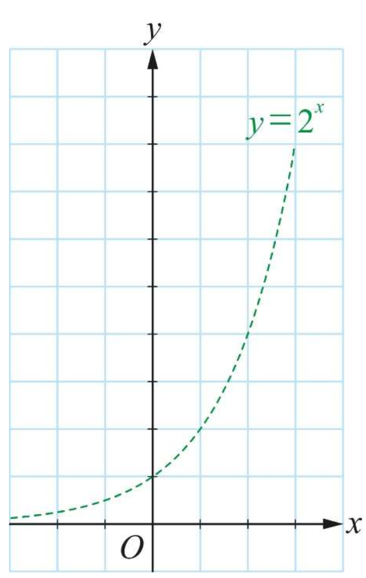
向下平移 k 單位後得 $y=a^x-k$



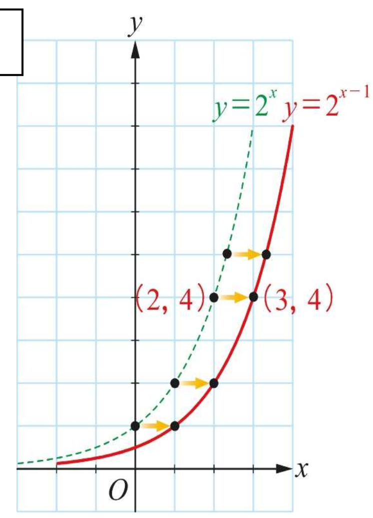


例3.1：試利用 $y=2^x$ 的圖形，描繪出下列函數的圖形：(1) $y=2^{x-1}$　　(2) $y=2^x+2$

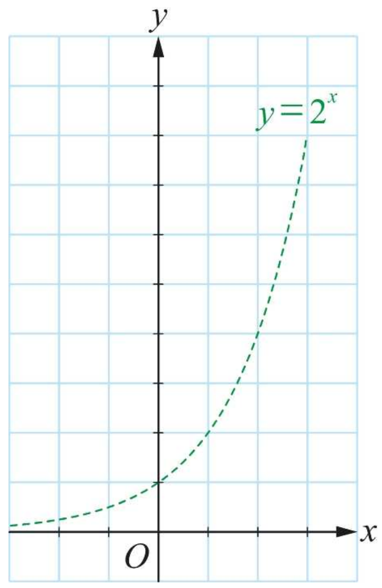
解：(1) $y=2^{x-1}$ 由 $y=2^x$ 的圖形向_____平移___單位



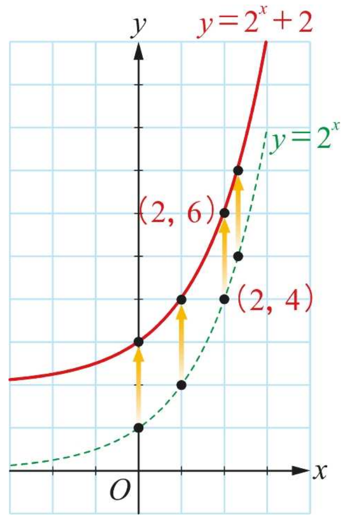
參考



(2) $y=2^x+2$ 由 $y=2^x$ 的圖形向____平移____單位



參考



例 3.2：將函數 $y=2^x$ 的圖形，先向左平移 3 單位，再向上平移 5 單位之後圖形的函數為_______

重點 4：指數方程式

1.定義：當方程式的未知數出現在**指數位置**時，稱為指數方程式

2.解指數方程式：

(1)化為相同底數的指數式。當 $a^x=a^y$ 時，則 $x=y$

(2)常數與指數式分開表示為指數標準形式

(3)指數函數 $f(x)=a^x>0$，檢查解是否正確？

註：解指數方程式 $y=f(x)=a^x$，乃利用函數 $f(x)$ 在 x 軸上方恰與水平直線 $y=h$ 交於一點之性質

例 4.1：試解下列方程式：

(1) $2^{3x+1}=8$　　(2) $9^x-2\cdot 3^{x+1}-27=0$

重點 5：指數不等式

1.意義：指數函數 $f(x)\neq 0$ 稱為**指數不等式**，包含 $f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$ 等四種為指數不等式

2.性質：同底數之指數的大小比較：

(1)當 $a>1$ 時，指數函數為**遞增函數**，

則若 $\alpha<\beta \Leftrightarrow a^\alpha<a^\beta$，如圖 1

(2)當 $0<a<1$ 時，指數函數為**遞減函數**，

則若 $\alpha<\beta \Leftrightarrow a^\alpha>a^\beta$，如圖 2

註：一般原則是先**換成底數相同**或**換成指數相同**

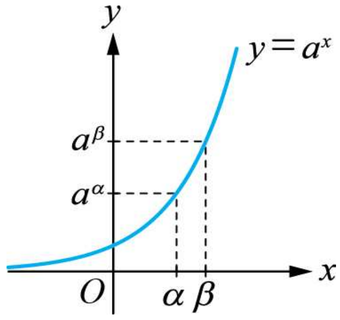


圖 1

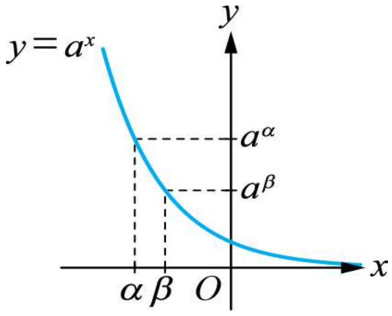


圖 2

3.最大值與最小值：

利用**配方法**求指數函數之最大值與最小值

例 5.1：(1)設 $a=4^{\sqrt{3}}$，$b=8^{\sqrt{2}}$，$c=16$，試比較 a，b，c 的大小關係

(2)設 $a=0.04^{\sqrt{2}}$，$b=0.008^{\sqrt{2}}$，$c=0.0016$，試比較 a，b，c 的大小關係

例 5.2：試解下列不等式：

(1) $27^{2x+1}<9^{x+2}$　　(2) $(\frac{1}{4})^x+2(\frac{1}{2})^x-8\geq 0$

重點 6：指數函數在生活中的應用問題

1.意義：將生活中的問題(如半衰期等)，轉換為數學式後，利用指數函數的運算方式，求得其解

2.常見指數模式：

(1)半衰期：設某放射性物質原重 m，半衰期為 T 時間，則經過 x 時間後，剩下物質重為 $m(\frac{1}{2})^{\frac{x}{T}}$

(2)複利計息本利和：設本金為 P，利率為 $r\,\%$，期數為 n，則本利和 $=\mathrm{P}(1+r\%)^n$

單利計息本利和：設本金為 P，利率為 $r\,\%$，期數為 n，則本利和 $=\mathrm{P}(1+n\cdot r\%)$

例 6.1：非洲豬瘟是一種感染力極強的傳染病，於 2018 年首次傳入東亞，短短時間內，許多區域陸續淪陷。有傳染病學家發現，在無防疫措施之下受到豬瘟感染影響的土地面積 $f(x)$ (單位：平方公里)與時間 x (單位：月)的關係可用 $f(x)=c\cdot(\frac{7}{3})^x$ 來描述，其中 c 為常數。若一開始感染豬瘟的土地面積為 $\frac{1}{10}$，平方公里，試求一年後受到豬瘟影響的土地面積為多少平方公里？(四捨五入至小數點後第二位)