Ch3.3 多項式函數圖形與多項式不等式　　一年＿＿班　座號：＿＿　姓名：

重點 1：一次與二次函數的圖形

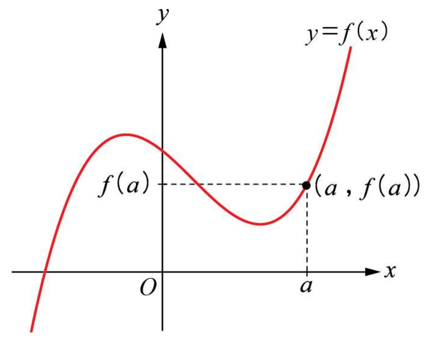
1.意義：對於函數 $f(x)$，利用描點法，將 x 當作橫坐標，y 當作縱坐標，將所有的點$(x, f(x))$描繪在坐標平面上，得**函數的圖形**，函數的圖形有助於我們更加理解函數的特性

2.多項式函數與圖形的概念：

(1)形如 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ 稱為多項式函數

其中 n 是非負整數，a_k 為係數，$k=0, 1, \cdots, n$

(2)若 $a_n \neq 0$，則稱 n 為多項式函數 $f(x)$的次數，簡記為 $\deg f(x)=n$



3.多項式函數的類型：(依多項式函數 $f(x)$的次數分類)

(1)常數函數：$f(x)=k$，k 為常數，其圖形為**水平線**

(2)一次函數：$f(x)=ax+b$，其中 $a\neq 0$，其圖形為**一直線**

(3)二次函數：$f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$，其圖形為**拋物線**

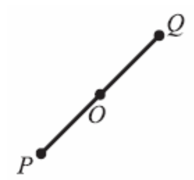
(4)三次與四次函數：$f(x)=x^3$ 與 $f(x)=x^4$ 等等

註：常數函數與一次函數合稱為線型函數；二次函數以上為曲線函數

重點 2：三次單項式

1.三次單項函數形如 $f(x)=ax^3$，$a\neq 0$ 稱為三次函數的基本型

註：設 a，b，c，d 為實數，形如 $y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 的函數，稱為**三次函數標準式**

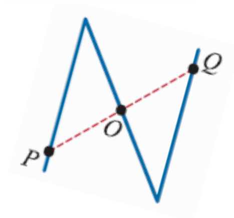


2.點對稱圖形：

(1)**對稱點**：如右上圖，當 $\overline{PQ}$ 的中點為 O 時，則稱 P 點對於 O 點的「**對稱點**」為 Q 點

(2)點對稱圖形：

一個圖形Γ，若可以找到一個 O 點，使得Γ上任一點 P 對於 O 點的對稱點 Q 也會落在Γ上，則稱圖形Γ為點對稱圖形，如右圖



(3)**對稱中心**：承(2)，O 點稱為圖形Γ的對稱中心 (在微積分中，稱為**反曲點**)

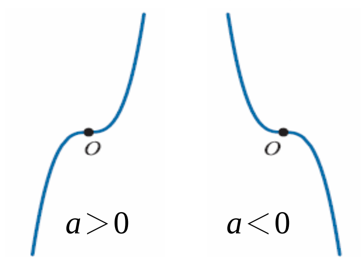
3.性質：(圖形參考例 1.2)

(1) $f(x)=ax^3$ 與 $g(x)=-ax^3$ 的圖形，皆通過原點(0，0)，且對稱於 x 軸

註：$f(x)=ax^3$ 沒有最大值，也沒有最小值

(2)當$a>0$時，$f(x)=ax^3$的圖形愈往右邊的點，會愈往上攀升，呈現**左下右上的趨勢**

當 $a<0$ 時，$f(x)=ax^3$ 的圖形愈往右邊的點，會愈往下降低，呈現**左上右下的趨勢**



例 1.1：利用描點法，畫出三次函數 $f(x)=x^3$ 的圖形

解：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$f(x)$	…						…

性質：

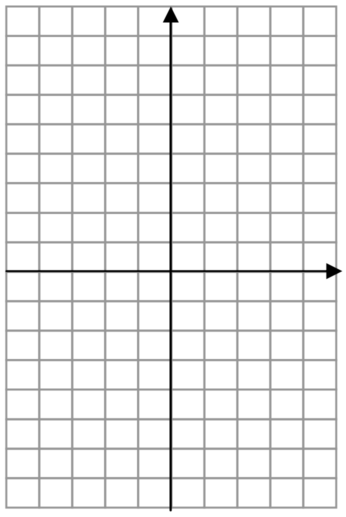
(1)當整數 x 增加時，其所對應的 y 值也＿＿＿＿，因此函數 $y=x^3$ 有＿＿＿性、無＿＿＿性

(2)在 $y=x^3$ 的圖形上，其關於原點(0，0)的對稱點：

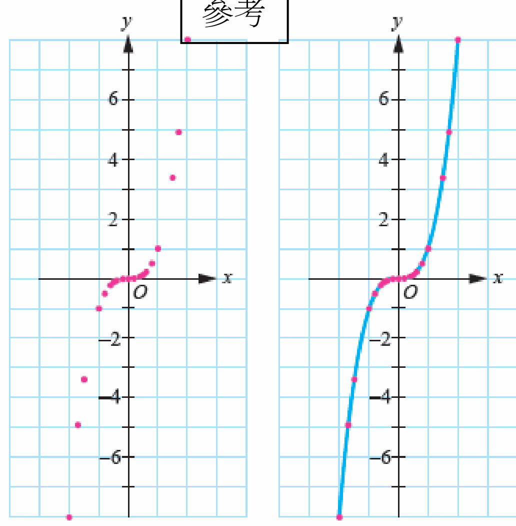
點(1，1)關於原點(0，0)的對稱點為＿＿＿＿＿

點(2，8)關於原點(0，0)的對稱點為＿＿＿＿＿

⇒函數 $y=x^3$ 具有＿＿＿性

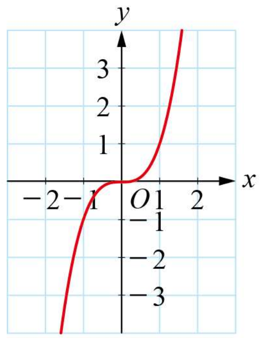


參考

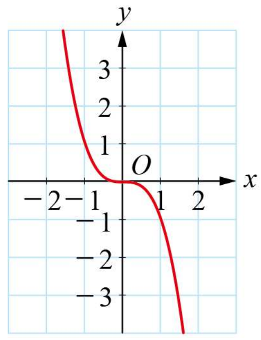


例 1.2：三次函數 $y=ax^3$ 圖形的特徵：

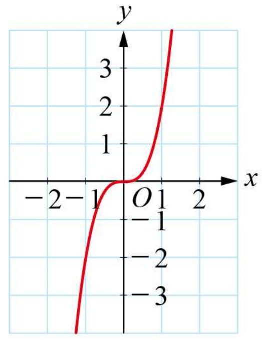
(1) $y=x^3$



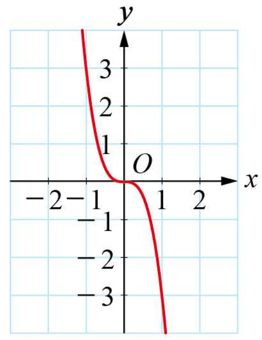
(2) $y=-x^3$



(3) $y=2x^3$



(4) $y=-3x^3$



圖形的特徵：

(1)圖形皆通過________

(2)圖形對稱於________，即以________為對稱中心

(3) $y=ax^3$ 的圖形

當 $a>0$ 時，如(1)(3)，圖形由左下向右上遞_____，且 $|a|$ 越大，遞增速度越____

當 $a<0$ 時，如(2)(3)，圖形由左上向右下遞_____，且 $|a|$ 越大，遞減速度越____

(4)沒有最___值及最___值

重點 2：三次函數 $y=ax^3+px$ 的圖形

1.三次函數 $f(x)=y=ax^3+px$，$p\neq 0$ 的圖形通過原點(0，0)，且對稱於**原點**

說明：$\because f(-x)=a(-x)^3+p(-x)=-ax^3-px=-f(x)$，故對稱於原點

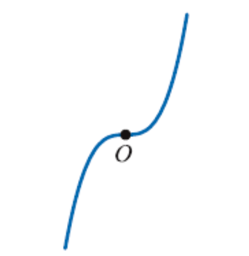
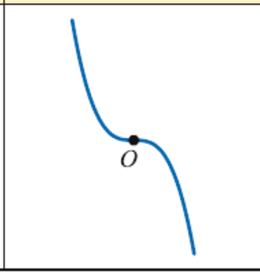
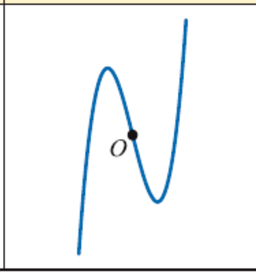
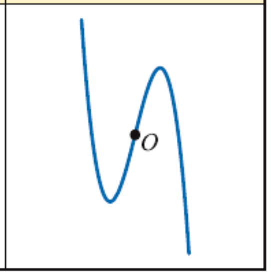
2.圖形特性：

當 $a>0$ 時，圖形的最右方都是**上升**的

當 $a<0$ 時，圖形的最右方都是**下降**的

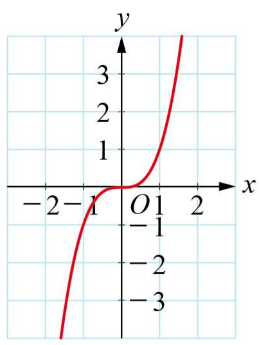
3.三次函數 $f(x)=y=ax^3+px$，$p\neq 0$

沒有最大值，也沒有最小值

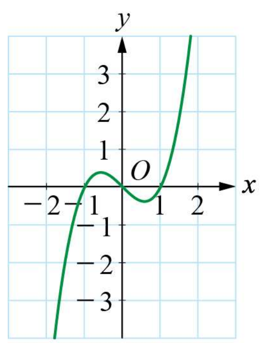
a,p 同號		a,p 異號	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
			

例 2.1：三次函數 $y=ax^3+px$ ，$p\neq 0$ 圖形的特徵：

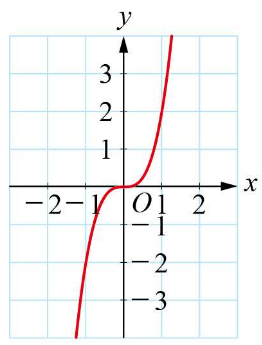
(1) $y=x^3+x$



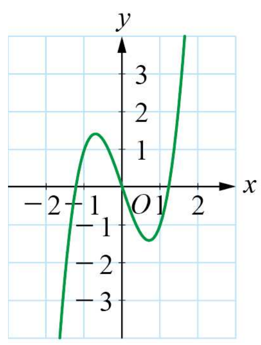
(2) $y=x^3-x$



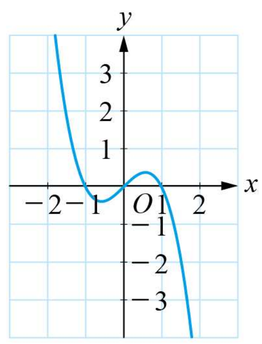
(3) $y=x^3+2x$



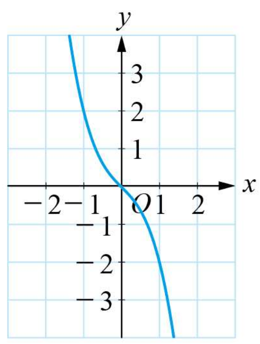
(4) $y=2x^3-3x$



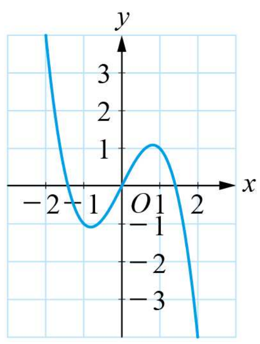
(5) $y=-x^3+x$



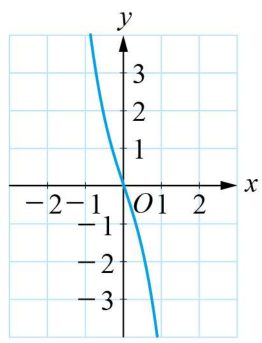
(6) $y=-x^3-x$



(7) $y=-x^3+2x$



(8) $y=-2x^3-3x$



圖形的特徵：

(1)圖形皆通過________

(2)圖形對稱於________，即以________為對稱中心

(3)當 $a>0$，$p>0$ 時，如(1)(3)，圖形由左下向右上升到無限大，圖形與 x 軸**只有____個交點**

當 $a>0$，$p<0$ 時，如(2)(4)，圖形由左下向右上升到無限大，圖形與 x 軸**有____個交點**

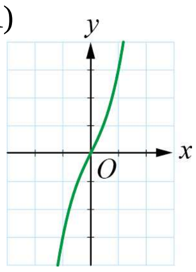
當 $a<0$，$p>0$ 時，如(5)(7)，圖形由左上向右下降到無限大，圖形與 x 軸**有____個交點**

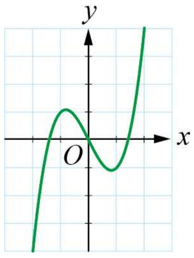
當 $a<0$，$p<0$ 時，如(6)(8)，圖形由左上向右下降到無限大，圖形與 x 軸**只有____個交點**

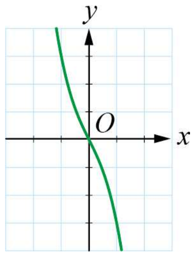
註：(i) a，p 同號，圖形與 x 軸只有一個交點；a，p 異號，圖形與 x 軸只有____個交點

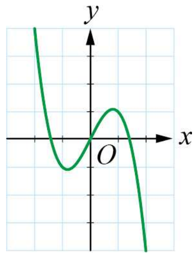
(ii) $x=0$ 附近，當 $p>0$ 時，圖形向右上，當 $p<0$ 時，圖形向右下

例 2.2：下列四個圖形中哪一個為 $y=x^3-2x$ 的圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)


重點 3：三次(單項)式與平移

1.三次單項函數形如 $f(x)=ax^3$，$a\neq 0$ 稱為三次函數的基本型

2.圖形的平移：

$S(x)=ax^3$ 的圖形	沿 x 軸向右平移 h 單位 → ← 沿 x 軸向左平移 h 單位	$f(x)=a(x-h)^3$ 的圖形	沿 y 軸向上平移 k 單位 → ← 沿 y 軸向下平移 k 單位	$f(x)=a(x-h)^3+k$ 的圖形

例 3.1：已知函數 $y=f(x)=2x^3+5x$ 的圖形對稱於原點，則：

(1) $f(x)$的圖形向左平移 1 單位後，再向上平移 3 單位，得到 $g(x)$的圖形，求 $g(x)=$______

(2) $h(x)$的圖形向左平移 2 單位後，再向下平移 5 單位，得到 $f(x)$的圖形，求 $h(x)=$______

重點 4：三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形

1.三次函數 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 都可以經由配三次方化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式

註：立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

說明：$y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x^3+\dfrac{b}{a}x^2)+cx+d=a(x+\dfrac{b}{3a})^3-\dfrac{b^2}{3a}x-\dfrac{b^3}{27a^2}+cx+d$

$$=a(x+\frac{b}{3a})^3+(c-\frac{b^2}{3a})(x+\frac{b}{3a})+(-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d)$$

$$=a(x-h)^3+p(x-h)+k$$

其中 $\boldsymbol{h}=-\dfrac{b}{3a}$　　$\boldsymbol{p}=c-\dfrac{b^2}{3a}=c+bh$　　$\boldsymbol{k}=-\dfrac{b^3}{27a^2}+\dfrac{b^3}{9a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d=f(-\dfrac{b}{3a})=f(\boldsymbol{h})$

2.三次函數 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形皆可由 $y=ax^3+px$ 的圖形**平移(h，k)**得到

且點**(h，k)**$=(-\dfrac{b}{3a}$，$f(-\dfrac{b}{3a}))$為圖形的**對稱中心**，圖形是一條點對稱的曲線，既沒有**最高點**也沒有**最低點**

3.描繪三次函數的圖形：利用配三次方及平移的概念描繪

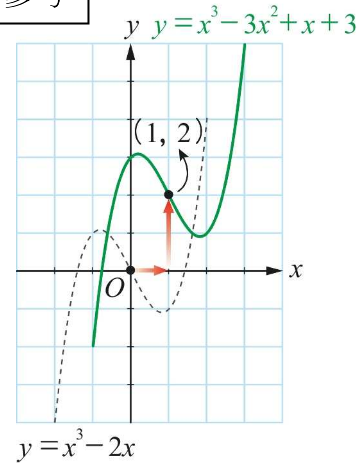
◎三次函數平移

例 4.1：已知 $x^3-3x^2+x+3=(x-1)^3-2(x-1)+2$，則：

(1)試說明由 $y=x^3-2x$ 的圖形如何平移得到 $y=x^3-3x^2+x+3$ 的圖形

(2)求出 $y=x^3-3x^2+x+3$ 圖形的對稱中心

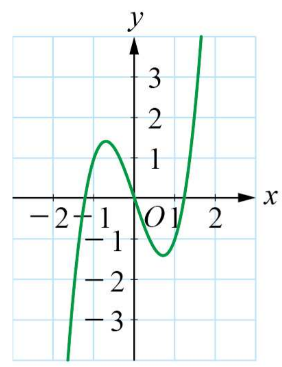
參考



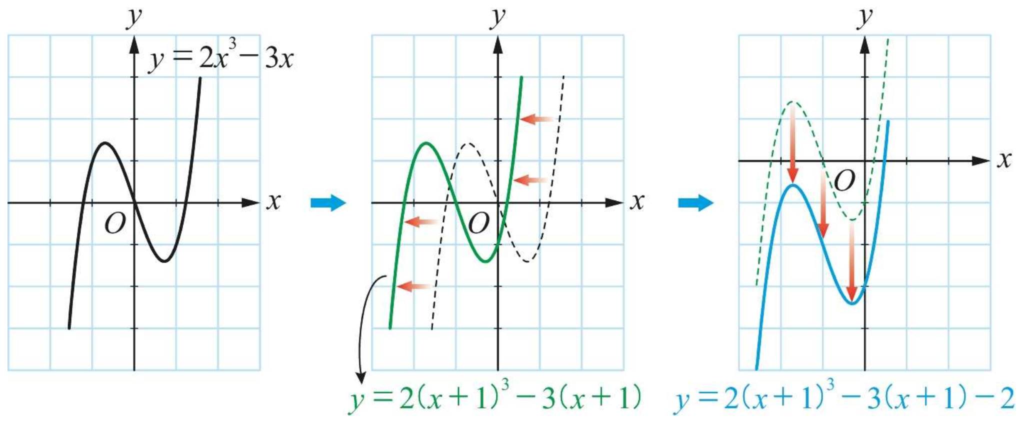
◎比較係數法、綜合除法

例 4.2：已知 $y=2x^3-3x$ 的圖形如右圖所示

(1)若已知 $2x^3+6x^2+3x-3=2(x+a)^3+b(x+a)+k$，試求出 a，b，k 的值



(2)利用(1)的結果繪製 $y=2x^3+6x^2+3x-3$ 的圖形

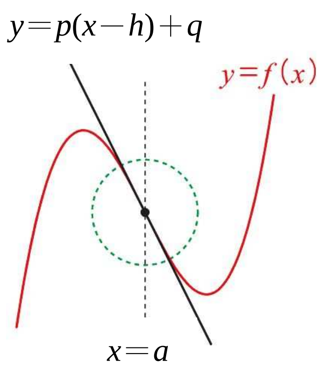


◎公式法

例 4.3：將下列函數化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：

(1) $y=x^3+3x^2+5x+7$　　(2) $y=x^3-6x^2$　　(3) $y=2x^3-2x^2+x+1$

重點 5：三次函數圖形的一次近似(廣域特徵與局部特徵)



1.意義：在**全體實數 x 值**內觀察函數 $y=f(x)$圖形的特徵，稱為**廣域特徵**(大域特徵)

在**限定範圍之 x 值**內觀察函數 $y=f(x)$圖形的特徵，稱為**局部特徵**

2.廣域特徵：(三次近似)

三次函數 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 圖形的廣域特徵**近似**於曲線 $y=ax^3$

說明：當 $x\neq 0$ 時，$y=ax^3+bx^2+cx+d=ax^3(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{d}{a}\cdot\frac{1}{x^3})$

則$|x|$很大時，$\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}\approx 0$，$\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2}\approx 0$，$\frac{d}{a}\cdot\frac{1}{x^3}\approx 0$，因此 $y\approx ax^3\cdot 1=ax^3$

3.局部特徵：(一次近似)

三次函數 $y=f(x)$利用連續綜合除法，表示成$(x-h)$的多項式 $y=a(x-h)^3+b(x-h)^2+\boldsymbol{p(x-h)+q}$ 的形式

則函數 $y=f(x)$的圖形在 $x=h$ 附近的局部特徵**近似**於直線 $y=\boldsymbol{p(x-h)+q}$

說明：函數 $y=f(x)$在 $x=h$ 附近的高次項 $a(x-h)^3+b(x-h)^2$ 之值影響小(近似於 0)，而 $\boldsymbol{p(x-h)+q}$ 之值是關鍵

註：直線 $y=\boldsymbol{p(x-h)+q}$，即為函數 $y=f(x)$在 $x=h$ 處的切線

註：二次函數 $y=f(x)=a(x-h)^2+b(x-h)+c$

廣域特徵：近似於拋物線 $y=f(x)=ax^2$

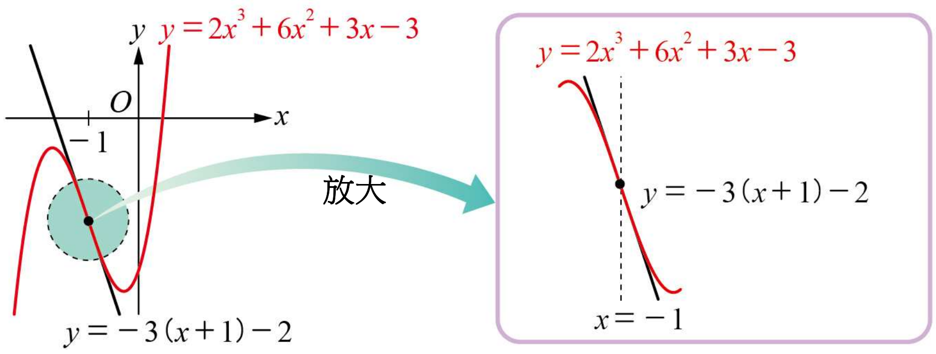
局部特徵：近似於直線 $y=f(x)=b(x-h)+c$

例 5.1：三次函數 $y=2x^3+6x^2+3x-3=2(x+1)^3-3(x+1)-2$，則：

(1)當 x 很靠近 -1 時，$2(x+1)^3\approx$ ______

(2)函數 $y=2x^3+6x^2+3x-3$ 與 $y=-3(x+1)-2$ 在 $x=-1$ 的附近相當靠近，如圖

則稱一次函數______________是函數 $y=2x^3+6x^2+3x-3$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似



例 5.2：考慮函數 $y=x^3+2x^2-x+4$，試求：

(1)此函數在 $x=-1$ 附近的一次近似

(2)此函數在 $x=-0.99$ 的近似值　　(四捨五入至小數點後第二位)

重點 6：高次多項式函數的圖形

1.高次多項式函數：一般稱三次以上(含)多項式函數為高次多項式函數

2.多項式函數的圖形的特徵(大域行為)：

設 n 為正整數，多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的圖形

(1)當 n 為偶數時：

若 $a_n>0$，則圖形的最左方及最右方皆會上升到無限大；

若 $a_n<0$，則圖形的最左方及最右方皆會下降到負無限大

(2)當 n 為奇數時：

若 $a_n>0$，則圖形的最左方會下降到負無限大；

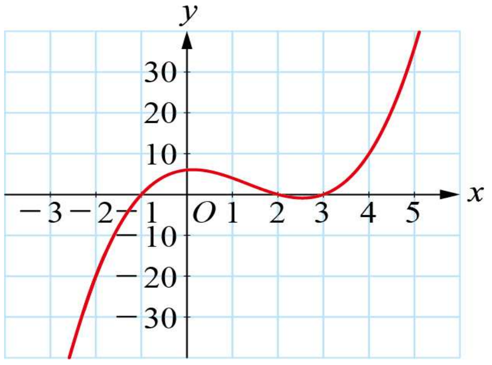
若 $a_n<0$，則圖形的最左方會上升到無限大，最右方會下降到負無限大

註：高次多項式函數的圖形是一條連續不間斷的曲線

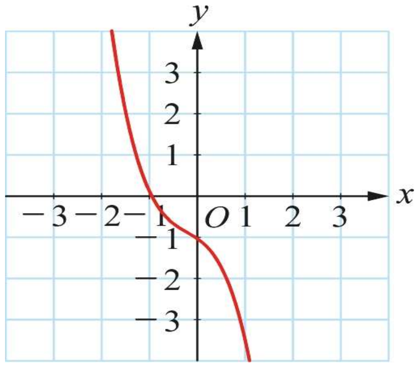
註：五次以上的多項式函數，可用微積分來處理

例 6.1：三次函數 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 的圖形示例

(1) $f(x)=x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$

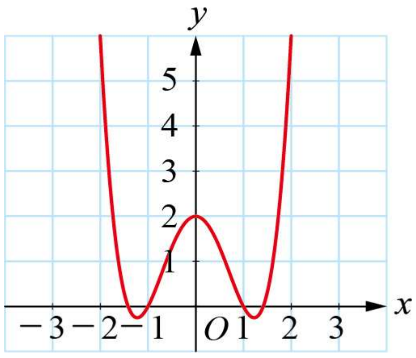


(2) $f(x)=-x^3-2x^2-2x-1=-(x+1)(x^2+x+1)$

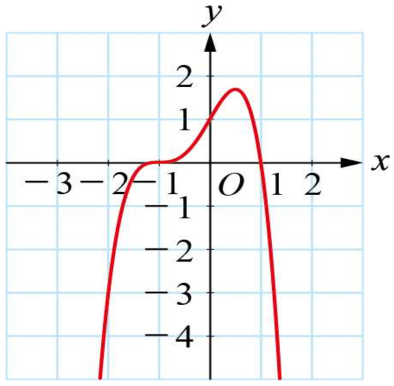


例 6.2：四次函數 $f(x)=y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，$a\neq 0$ 的圖形示例

(1) $f(x)=x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x+1)(x-1)$



(2) $f(x)=-x^4-2x^3+2x+1=-(x-1)(x+1)^3$



重點 7：一次(多項式)不等式

1.意義：設 $f(x)$為多項式，則 $f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$ 等統稱為多項式不等式

2.解多項式不等式：求出使得不等式成立的所有 x 值

3.一次不等式：

(1)設 $a\neq 0$，形如 $ax+b>0$，$ax+b\geq 0$，，$ax+b<0$，$ax+b\leq 0$ 稱為一次不等式

(2)解一次不等式只要移項即可，當同乘或同除一個負數時，不等號要變方向

例 7.1：試解下列各一次不等式：

(1) $2x-4<0$　　(2) $-3x-5<0$

重點 8：二次(多項式)不等式

1.二次不等式：

設 $a\neq 0$，則 $f(x)=ax^2+bx+c\neq 0$，包含 $f(x)>0$、$f(x)\geq 0$、$f(x)<0$、$f(x)\leq 0$ 四種型式，稱為**二次不等式**

2.解多項式二次不等式：意即求出「使不等式成立的所有實數 x 值」，一般其解為一個範圍(或區間)，步驟如下：

步驟 1：調整使得最高項次方的係數(領導係數)為**正**

步驟 2：因式分解完畢，求出其關鍵點(正負變化的點)

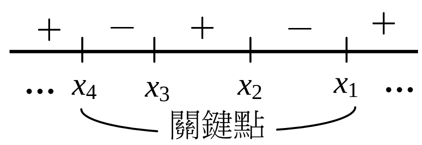
註：對 $y=ax^2+bx+c$ 作因式分解時，設判別式 $D=b^2-4ac$，則：

(1)$D>0$ 但不是完全平方數時，利用公式法 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ 分解

(2)$D=0$ 或 D 為完全平方數時，利用十字交乘法分解

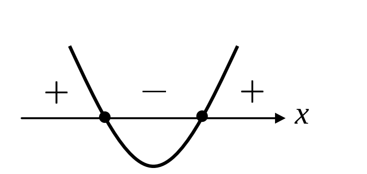
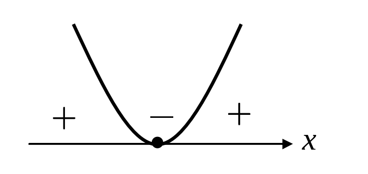
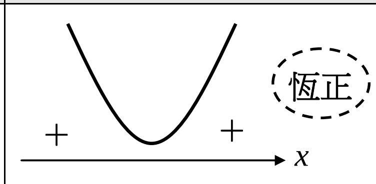
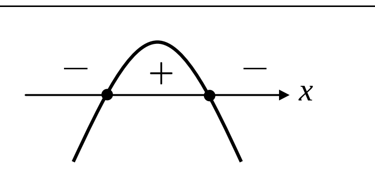
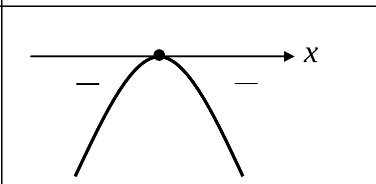
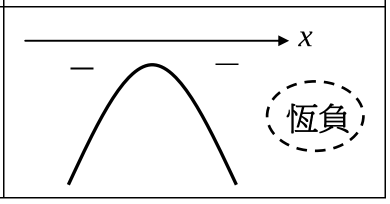
(3)$D<0$ 時，直接判定為「恆正」

步驟 3：將關鍵點標示在數線上，由右至左依序為＋、－、＋、－、⋯，如圖



步驟 4：根據不等式之型式，求出其解

註：依判別式 $D=b^2-4ac$ 的正負，可得圖形及相應的函數值正負號，如下表所示：

	$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

例 8.1：試解下列不等式：

(1) $x^2+5x-6\leq 0$　　(2) $x^2-4x+4>0$　　(3) $x^2-x+1<0$

例 8.2：若 k 為實數且對所有的實數 x，函數 $f(x)=kx^2+8x+(k+6)$的值恆為負數，試求 k 的範圍

重點 9：高次不等式

1.意義：一元三次以上之不等式，統稱為高次不等式。求解高次不等式的原理與二次不等式是相同的。

2.求解步驟：最高次項係數化為正→因式分解→得關鍵點→在數線上求解→驗證

註：實係數多項式必可分解成一次或兩次的因式乘積，因此只要分解完成，注意多項式的變化情況(正負號)就可以解任意次數的多項式不等式

3.解高次不等式求關鍵點之密技：

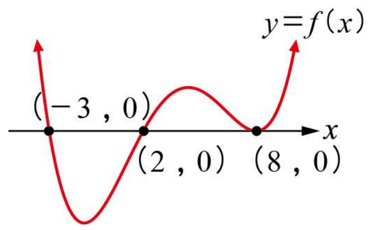
(1)一次式：保留

(2)二次式(偶數次)：含等號 $x-h=0$，不含等號 $x-h\neq 0$

(3)三次式(奇數次)：刪去至一式式

(4)判別式 $D<0$ 恆正時，刪去

例 9.1：已知多項式 $y=f(x)$的函數圖形如圖，試求不等式 $f(x)>0$ 的解



◎任意高次不等式

例 9.2：試解下列各不等式：

(1)$(x-1)(x+2)(x-3)>0$　　(2) $(x-2)^2(x+3)(-x^2+x-1)\geq 0$

例 9.3：已知多項式 $f(x)=x^3+ax+b$ 有一個因式 x^2-2x+5，試求 $f(x)<0$ 的解