Ch3.1 多項式的運算與應用　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：多項式的定義

定義：設 n 為正整數或 0，形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 的式子稱為**多項式**(polynomial)，
其中 a_n，a_{n-1}，⋯，a_1，a_0 均為實數，稱為多項式 $f(x)$ 的**係數**(coefficient)

註：(1)形如 $f(x)=a_nx^n$ 稱為單項式

(2)「將有限個單項式用加號連結起來的式子」也稱為多項式

(3)多項式的未知數(變數) x 不可以在分母、根號內、絕對值內、高斯符號內、指數或對數⋯⋯等

例 1.1：下列哪些是多項式？

(A) $x^2-\sqrt{5}x$　(B) $3-\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{1}{x}+x^3$　(D) $\sqrt{x}$　(E) 12　(F) $4x^3+|x|$

重點 2：多項式基本概念

設多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$，則：

(1)項：稱 a_nx^n，$a_{n-1}x^{n-1}$，⋯⋯，a_1x，a_0 為多項式 $f(x)$ 的 n 次項，$n-1$ 次項，⋯，1 次項，常數項

(2)係數：實數 a_n，a_{n-1}，⋯，a_1，a_0 稱為多項式 $f(x)$ 中 x^n，x^{n-1}，⋯，x，常數項的係數

註：若多項式 $f(x)$ 的所有係數 a_n，a_{n-1}，⋯，a_1，a_0 都是整數，則稱 $f(x)$ 為**整係數多項式**，以 $f(x)\in Z[x]$ 表示

若多項式 $f(x)$ 的所有係數 a_n，a_{n-1}，⋯，a_1，a_0 都是有理數，則稱 $f(x)$ 為**有理係數多項式**，以 $f(x)\in Q[x]$ 表示

若多項式 $f(x)$ 的所有係數 a_n，a_{n-1}，⋯，a_1，a_0 都是實數，則稱 $f(x)$ 為**實係數多項式**，以 $f(x)\in R[x]$ 表示

(3)次數：當係數 $a_n\neq 0$ 時，稱 n 為多項式 $f(x)$ 的次數，以符號 $\deg f(x)=n$ 表示，並稱多項式 $f(x)$ 為 n 次多項式

a_n 稱為 $f(x)$ 的最高項係數，或稱 a_n 為 $f(x)$ 的**領導係數**(leading coefficient)

註：零多項式：若多項式 $f(x)=0$ 時，稱 $f(x)$ 為零多項式，因 $0=0\,x^n$ 而不計其次數

零次多項式：若多項式 $f(x)=k\neq 0$ 時，稱 $f(x)$ 為零次多項式

常數多項式：「零次多項式」與「零多項式」統稱為**常數多項式**

(4)多項式 $f(x)$ 的值：當多項式 $f(x)$ 中的 x 代表特定數值 a 時，我們稱 $f(a)$ 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值

(5)降次排列：將多項式 $f(x)$ 的每一項，按照 x 的次方，由高而低排列，稱為多項式 $f(x)$ 的降次(冪)排列

升次排列：將多項式 $f(x)$ 的每一項，按照 x 的次方，由低而高排列，稱為多項式 $f(x)$ 的升次(冪)排列

註：若多項式未指定排列方式，習慣上以降次(冪)排列為主

例 2.1：(1)多項式 $f(x)=x^4-3x^2+4x+5$，試求：

$\deg(f(x))=$_____，x^2 項的係數為______及常數項為_____

(2)若多項式 $(a+2)x^4-(b-1)x^3+x^2+a^2+b-3$ 是 x 的二次多項式，試求此多項式的常數項為_____

重點 3：多項式相等

1.意義：當兩多項式 $f(x)$，$g(x)$，其相對應的每一單項的係數都相同，則稱這兩個多項式相等，表示為 $f(x)=g(x)$

2.性質：兩個相等的非零多項式，其次數必相同

3.多項式之值：

當 $f(x)$ 為多項式且 a 為實數時，$f(a)$ 代表將 x 以 a 代入後運算的結果

例 3.1：若多項式 $f(x)=ax^2+(4-b)x+c$ 與 $g(x)=2x^2+(b+2)x-3c$ 相等，試求 a，b，c 之值

例 3.2：已知多項式 $f(x)=x^2-5x+6$，試求下列各小題：

(1) $f(0)=$_____　　(2) $f(1)=$_____　　(3) $f(2)=$_____

重點 4：多項式的四則運算(加減法運算)

1.多項式的加減法：兩多項式相加或相減時，是把次數相同的單項係數相加或相減

2.運算方式：多項式的加減可以利用**橫式**，**直式**或**分離係數法**做運算

3.性質：若 $\deg f(x)=m$，$\deg g(x)=n$，則 $\deg(f(x)\pm g(x))\leq \max(m，n)$

例 4.1：若多項式 $f(x)=x^3+x^2+x+2$ 且 $g(x)=x^3+x^2+3x-1$，試求：

(1) $f(x)+g(x)=$__________　　(2) $f(x)-g(x)=$__________

重點 5：多項式的四則運算(乘法運算)

1.兩個單項式的乘法運算：設 ax^n 與 bx^m 相乘，則係數相乘，x 的次方相加，即 $ax^n\times bx^m=ab\,x^{n+m}$

例如：$2x^3\times(-7x^2)=-14x^5$

2.運算方式：多項式的相乘，利用乘法對加法的**分配律**來計算，分為**橫式**、**直式**或**分離係數法**的運算

3.若多項式 $f(x)$的最高次項為 ax^n，得知 $f(x)$的最高次為 n 次，記為 $\deg(f(x))=n$，則：

若 $\deg(f(x))=n$，$\deg(g(x))=m$，則 $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)=n+m$

例 5.1：設多項式 $f(x)=x+4$ 且 $g(x)=x^2-4x+5$，試求：

(1) $f(x)g(x)=$__________　　(2) $\deg f(x)\,g(x)=$_______

重點 6：多項式的四則運算(除法運算)

1.兩個單項式的除法運算：設 ax^n 除以 bx^m，則係數相除，變數 x 的次方相減，即 $\dfrac{ax^n}{bx^m}=(\dfrac{a}{b})x^{n-m}$

2.多項式的除法原理：

將多項式 $f(x)$除以多項式 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，得到唯一的商式 $q(x)$及餘式 $r(x)$，

即 $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$，其中 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$ 或是 $r(x)=0$ (整除時餘式為 0)

註：$f(x)$除以 $g(x)$時，稱 $f(x)$為被除式，$g(x)$為除式

3.運算方式：多項式的相除，利用除法原理來計算，運算至**餘式的次數**比**除式的次數小** (整除時，餘式的次數為 0)時，就停止計算，可得到唯一的商式及餘式

4.多項式的除法計算過程，可利用**直式做長除法**、**分離係數法**與**綜合除法**(簡便的長除法)的運算

例 6.1：設多項式 $f(x)=2x^3+x^2-3$ 且 $g(x)=x-2$，試求 $f(x)$除以 $g(x)$的：

(1)商式為____________　　(2)餘式為_____

例 6.2：已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，$g(x)=x^2-x+1$，若 $g(x)$整除 $f(x)$，試求：

(1)數對$(a，b)=$______　　(2)商式為______

例 6.3：設 $f(x)$除以 $g(x)$的商式為 $q(x)$，餘式為 $r(x)$，試求：

(1) $f(x)$除以 $2g(x)$的商式為___________，餘式為_____

(2) $f(x)$除以$\dfrac{1}{3}g(x)$的商式為___________，餘式為_____

例 6.4：已知 $f(x)=2x^3+3x^2+4x-1$，$g(x)=x+1$，利用綜合除法計算 $f(x)$除以 $g(x)$的：

(1)商式為_________　　(2)餘式為_____

重點 7：多項式的泰勒展開式(連續使用綜合除法運算)

意義：多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 在 $x=k$ 時做**連續的綜合除法**運算

得 $f(x)=b_n(x-k)^n+b_{n-1}(x-k)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1(x-k)+a_0$，稱此式為多項式 $f(x)$ 在 $x=k$ 的**泰勒展開式**

註：1.泰勒展開式中 $b_i=\dfrac{f^{(n)}(k)}{n!}$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$

2.常數項 $a_0=f(k)$

例 7.1：若多項式 $f(x)=2x^3+x^2-3x+4=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，其中 a，b，c，d 是常數，試求 a，b，c，d 之值

重點 8：餘式定理

1.意義：多項式 $f(x)$ 被一次式 $ax-b$ $(a\neq 0)$所除的餘式為 $f(\dfrac{b}{a})$，稱為**餘式定理**

2.性質：求多項式函數 $f(x)$ 在 $x=k$ 的函數值時，使用餘式定理，利用多項式的除法，計算其餘式即為函數值 $f(k)$

例 8.1：試求多項式 $f(x)=2x^9+x^2-3x+1$ 除以 $x+1$ 的餘式為_______

例 8.2：設多項式 $f(x)=x^4+8x^3+9x^2+27x+89$，試求 $f(-7)=$______

例 8.3：設多項式 $f(x)$除以 $x-1$ 的餘式為 2，除以 $x-2$ 的餘式為 4，試求多項式 $f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式為______

重點 9：因式定理

1.因式與倍式：若當多項式 $f(x)$除以非零多項式 $g(x)$的餘式為 0 時，即 $f(x)$可被 $g(x)$整除，則：

存在一多項式 $q(x)$，使得 $f(x)=g(x)\,q(x)$，稱 $g(x)$為 $f(x)$的**因式**，或稱 $f(x)$為 $g(x)$的**倍式**

2.因式定理：若 $f(x)$有一次因式 $ax-b$，則 $f(\frac{b}{a})=0$，反之，若 $f(\frac{b}{a})=0$，則 $f(x)$有一次因式 $ax-b$

3.性質：

(1)由餘式定理中，若多項式 $f(x)$被一次式 $ax-b$ $(a\neq 0)$整除時，則其餘式 $f(\frac{b}{a})=0$，稱為**因式定理**

(2)若 $f(x)$有 $x-a_1$，$x-a_2$，…，$x-a_n$ 等一次因式，且 a_1，a_2，…，a_n 兩兩互異時，

則 $f(x)$有因式$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，即可假設 $f(x)=g(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，其中 $g(x)$為非零之多項式

例 9.1：試判斷：

(1) $2x+1$ 是否為 $2x^3+x^2-4x-2$ 的因式？答：_____

(2) $x-2$ 是否為 x^4+x^2-8x-6 的因式？答：_____

例 9.2：若三次多項式 $f(x)$滿足 $f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=2$，$f(0)=1$，試求 $f(x)=$____________