

Ch 1.1 二次函數的圖形

重點 1：二次函數的意義

1. 函數的概念：在 x 、 y 兩個變量的關係式中，如果對於每一個 x 值，恰好都有一個 y 值與它對應，就說 y 是 x 的函數

2. 二次函數：

經化簡後形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函數，其變數 x 的最高次數為二次，故稱為二次函數

例如： $y = 2x^2 + 1$ 、 $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ 、 $y = (x - 10)^2$

註：形如 $y = ax + b$ 的函數，則：

當 $a \neq 0$ 時，稱為一次函數，例如： $y = 4x - 1$ ， $y = -22x$ 等

當 $a = 0$ 時，即 $y = b$ ，稱為常數函數，例如： $y = -5$ ， $y = \frac{3}{4}$ 等

例 1.1：判斷下列 x 、 y 的關係式中， y 是否為 x 的函數？

(1) $y = 2x^2 + 1$

(2) $y = -x^2 + 3x - \frac{1}{2}$

(3) $y = (x - 10)^2$

Ex1.1：判斷下列 x 、 y 的關係式中， y 是否為 x 的函數？

(1) $y = -\frac{5}{3}x^2 + 4$

(2) $y = x^2 - x - 2$

(3) $y = (2x + 1)^2$

例 1.2：以下哪些是常數函數？哪些是一次函數？哪些是二次函數？

(A) $y = 3x + 2$

(B) $y = 5$

(C) $y = 4x^2 + 1$

(D) $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 3$

(E) $y = 0$

(F) $y = x$

(G) $y = x^2 + 3$

(H) $y = 2(x - 1)^2 - 2x^2$

解：常數函數：_____

一次函數：_____

二次函數：_____

Ex1.2：以下哪些是常數函數？哪些是一次函數？哪些是二次函數？

(A) $y = \sqrt{2}$

(B) $y = \frac{1}{2}x^2$

(C) $y = -0.4x - 1$

(D) $y = 6x$

(E) $y = (5x - 1)^2 + 2$

(F) $y = 3(x + 2)^2 - 3x^2$

解：常數函數：_____

一次函數：_____

二次函數：_____

重點 2：二次函數 $y=ax^2$ 的圖形

1. 一次函數的圖形是一直線

作一次函數 $y=ax+b$ 的圖形時，將變數 x 當作橫坐標，變數 y 當作縱坐標，再將數對 (x, y) 所對應的點，描繪在坐標平面上，其圖形為「一直線」

2. 二次函數的圖形是拋物線

作二次函數 $y=ax^2$ 的圖形時，步驟如下：

(1) 選取關鍵點 $(0, 0)$ ，及 $x=0$ 的左右各 2 個點，再分別求其 y 值

(3) 利用描點法將(2)中的 5 個點，描繪在平面上

(4) 點與點間須以平滑曲線連接，即為二次函數圖形(拋物線)

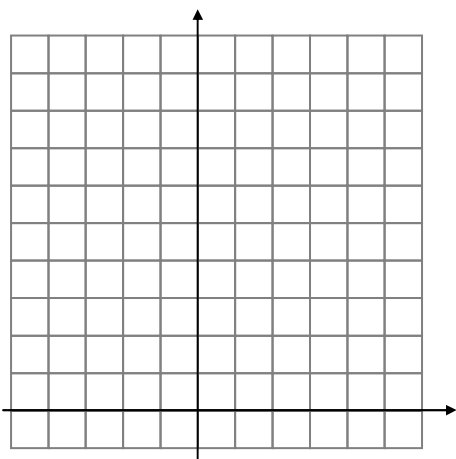
例 2.1：作二次函數 $y=x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

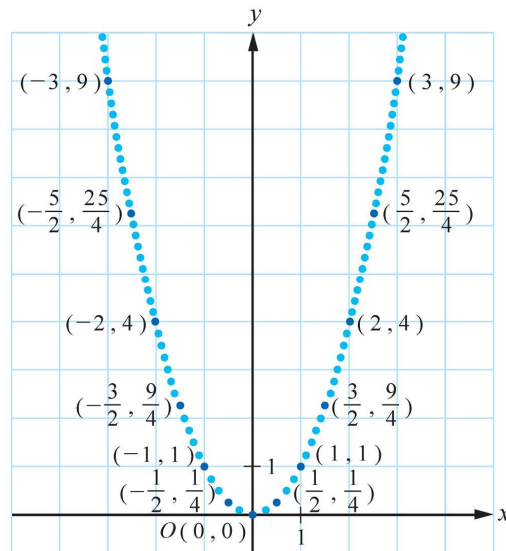
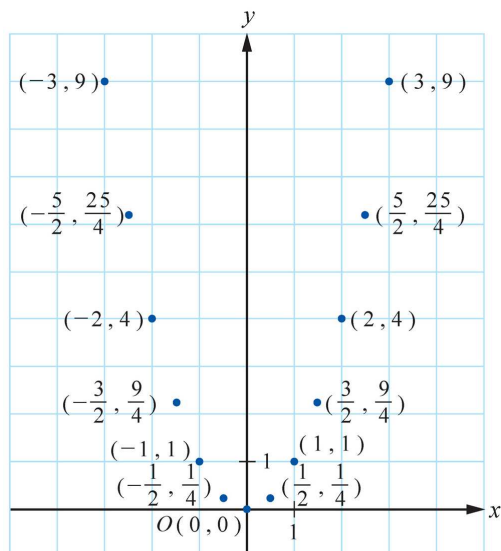
步驟 2：

x	...				0				...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



註：可以再多取一些 x 值，使圖形更準確



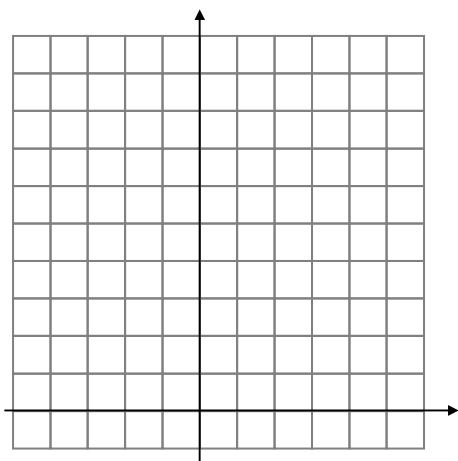
Ex2.1：作二次函數 $y=2x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



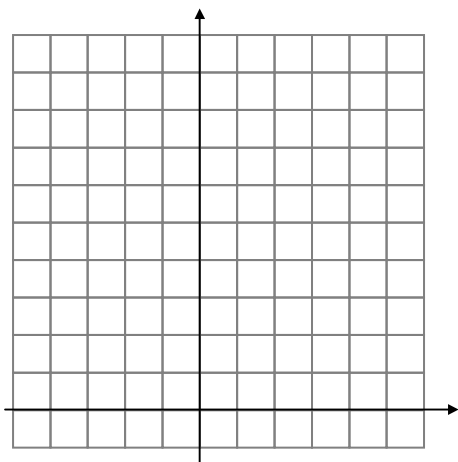
Ex2.11：作二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



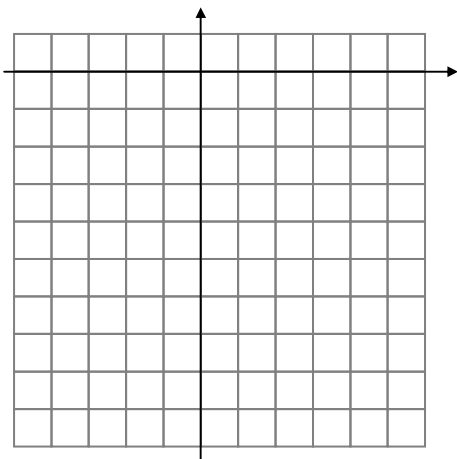
例 2.2：作二次函數 $y = -x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



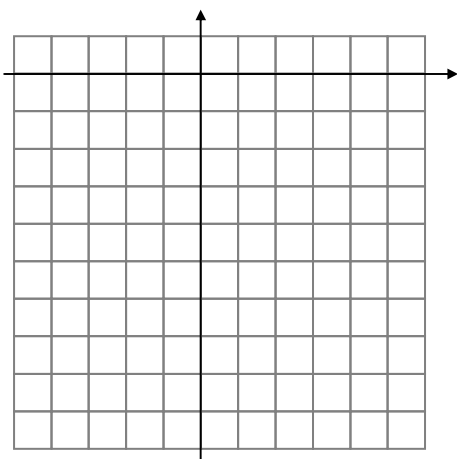
Ex2.2：作二次函數 $y = -2x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



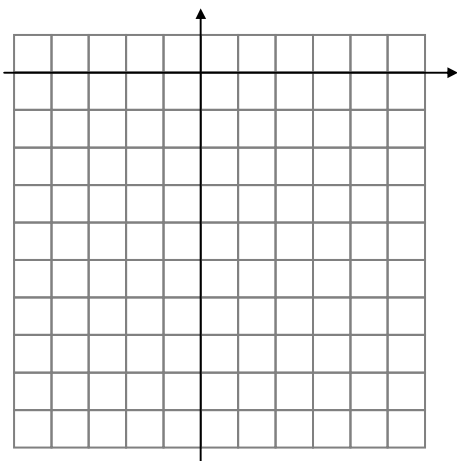
Ex2.21：作二次函數 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...				0				...
y

步驟 3：將(2)中的點，描繪在坐標平面上，並以平滑曲線將點與點連接



重點 3：二次函數 $y = ax^2$ 圖形的性質

1. 拋物線開口方向：

$a > 0$ ，開口向上； $a < 0$ ，開口向下

2. 開口大小：

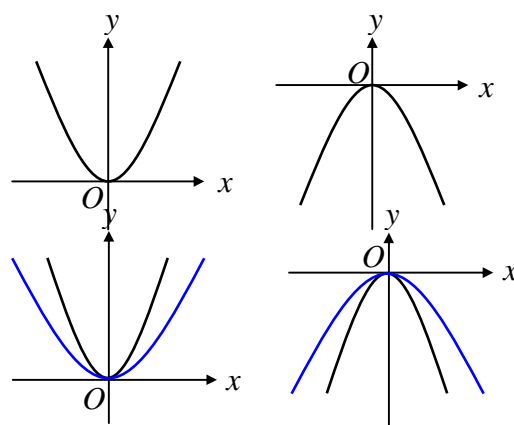
$|a|$ 愈大，開口愈小； $|a|$ 愈小，開口愈大

3. 頂點坐標為 $(0, 0)$ ，其中

$a > 0$ ，開口向上時，頂點 $(0, 0)$ 為最低點

$a < 0$ ，開口向下時，頂點 $(0, 0)$ 為最高點

4. 平滑曲線，以 y 軸為對稱軸的線對稱圖形



例 3.1：試在同一坐標平面上，作二次函數 $y = \frac{1}{2}x^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = 2x^2$ 的圖形，並比較其開口大小

解： $y = \frac{1}{2}x^2$

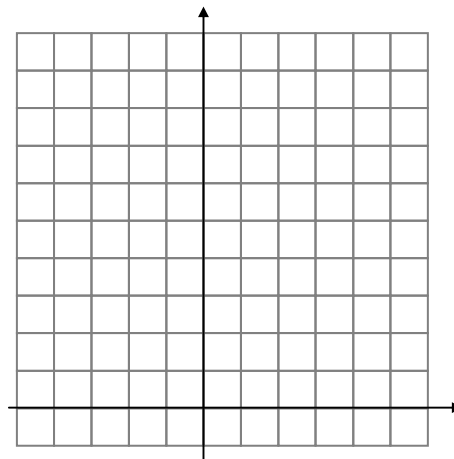
x	...				0				...
y

$y = x^2$

x	...				0				...
y

$y = 2x^2$

x	...				0				...
y



Ex3.1：試在同一坐標平面上，作二次函數 $y = \frac{1}{3}x^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = 3x^2$ 的圖形，並比較其開口大小

解： $y = \frac{1}{3}x^2$

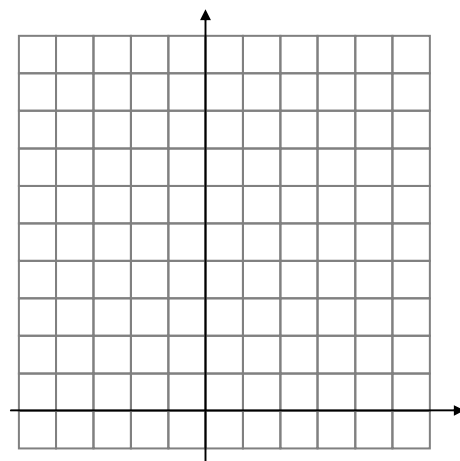
x	...			0			...
y

$y = x^2$

x	...			0			...
y

$y = 3x^2$

x	...			0			...
y



例 3.2：試在同一坐標平面上，作二次函數 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 、 $y = -x^2$ 、 $y = -2x^2$ 的圖形，並比較其開口大小

解： $y = -\frac{1}{2}x^2$

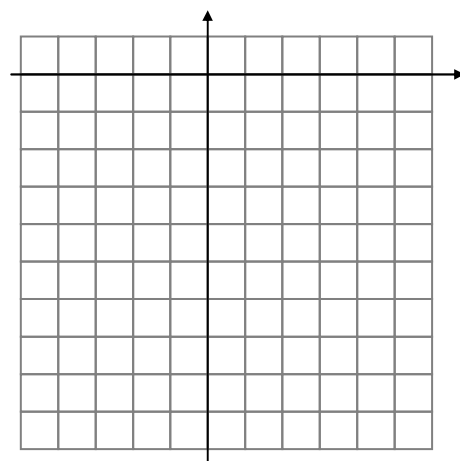
x	...			0			...
y

$y = -x^2$

x	...			0			...
y

$y = -2x^2$

x	...			0			...
y



Ex3.2：試在同一坐標平面上，作二次函數 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 、 $y = -x^2$ 、 $y = -3x^2$ 的圖形，並比較其開口大小

解： $y = -\frac{1}{3}x^2$

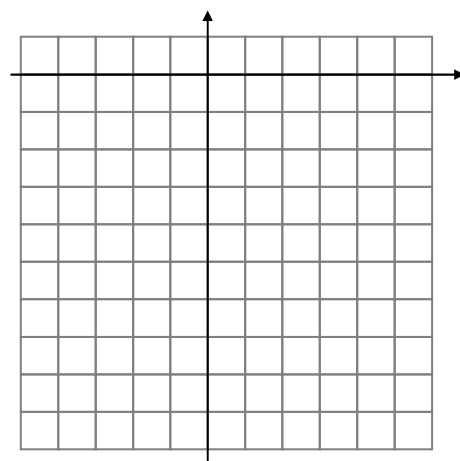
x	...			0			...
y

$y = -x^2$

x	...			0			...
y

$y = -3x^2$

x	...			0			...
y



例 3.3：試比較下列各二次函數開口的大小關係：

(1)(A) $y=3x^2$ 、(B) $y=2x^2$ 、(C) $y=\frac{1}{3}x^2$ (2) (A) $y=-4x^2$ 、(B) $y=-2x^2$ 、(C) $y=-\frac{1}{4}x^2$

Ex3.3：試寫出下列各二次函數圖形的開口方向，並比較其開口的大小關係：

(A) $y=-5x^2$ 、(B) $y=2x^2$ 、(C) $y=5x^2$ 、(D) $y=-x^2$ 、(E) $y=\frac{3}{2}x^2$ 、(F) $y=-2x^2$

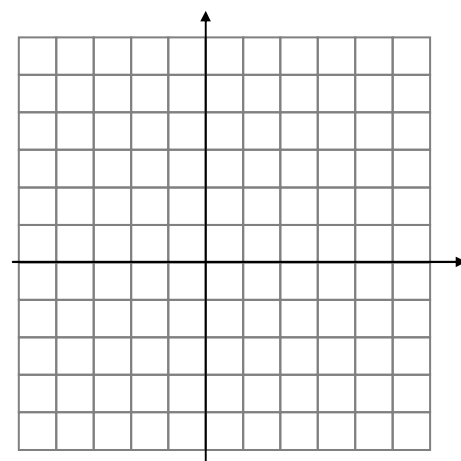
答：(1)圖形開口向上的有：_____，其開口由大到小排列為_____
 (2)圖形開口向下的有：_____，其開口由大到小排列為_____

例 3.4：試將二次函數 $y=x^2$ 、 $y=-x^2$ 的圖形描在同一坐標平面上，若將 $y=x^2$ 的圖形沿著 x 軸往下對摺，是否會和 $y=-x^2$ 的圖形重合？

解： $y=x^2$

x	...			0			...
y

x	...			0			...
y



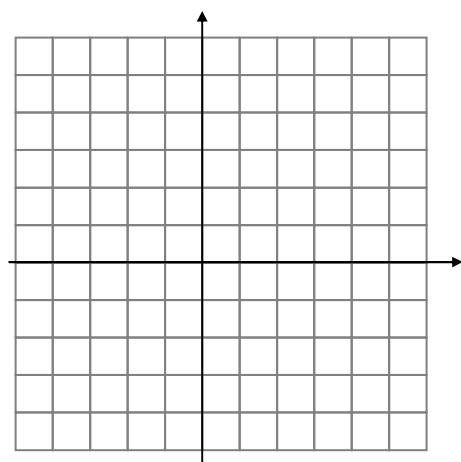
Ex3.4：試在同一坐標平面上，作二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=-2x^2$ 的圖形，若將 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形沿著 x 軸往下對摺，會和哪一個圖形重合？

解： $y=-\frac{1}{2}x^2$

x	...			0			...
y

x	...			0			...
y

x	...			0			...
y



重點 4：二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形

1. 作二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形時，步驟如下：

(1) 選取關鍵點 $(0, k)$ ，及 $x=0$ 的左右各 2 個點，再分別求其 y 值

(2) 利用描點法將(1)中的 5 個點，描繪在平面上

(3) 點與點間須以平滑曲線連接，即為二次函數圖形(拋物線)

2. 二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形性質

(1) 拋物線開口方向： $a>0$ ，開口向上； $a<0$ ，開口向下

(2) 開口大小： $|a|$ 愈大，開口愈小； $|a|$ 愈小，開口愈大

(3) 頂點坐標為 $(0, k)$ ，其中

$a>0$ ，開口向上時，頂點 $(0, k)$ 為最低點

$a<0$ ，開口向下時，頂點 $(0, k)$ 為最高點

(4) 平滑曲線，以 y 軸為對稱軸的線對稱圖形

例 4.1：作二次函數 $y=x^2+1$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

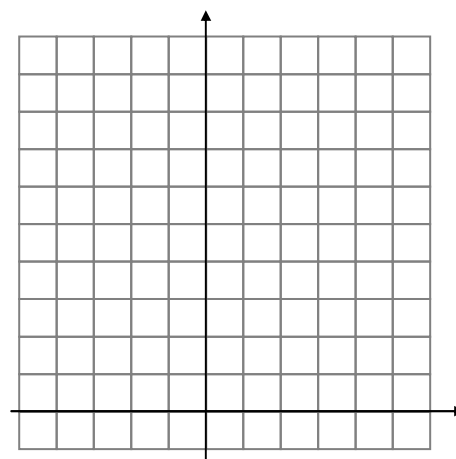
步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最低點坐標為_____



Ex4.1：作二次函數 $y=2x^2-2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

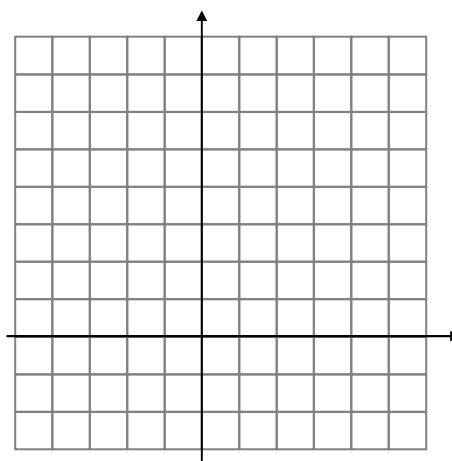
步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

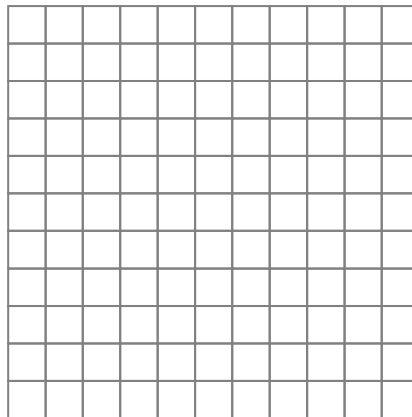
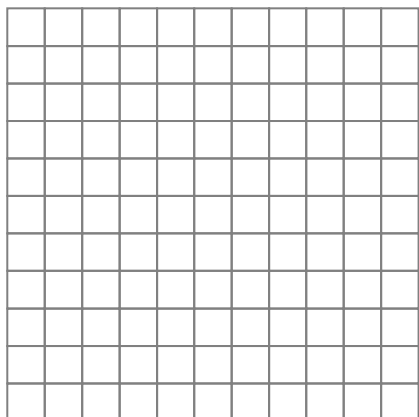
最低點坐標為_____



Ex4.11：作下列各二次函數的圖形：

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

(2) $y = 2x^2 + 1$



例 4.2：作二次函數 $y = -x^2 + 2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

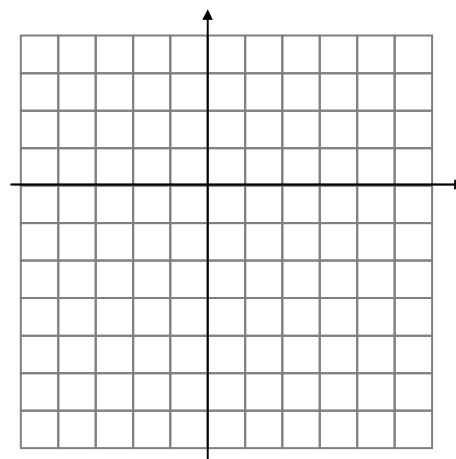
步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最高點坐標為_____



Ex4.2：作二次函數 $y = -3x^2 - 1$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

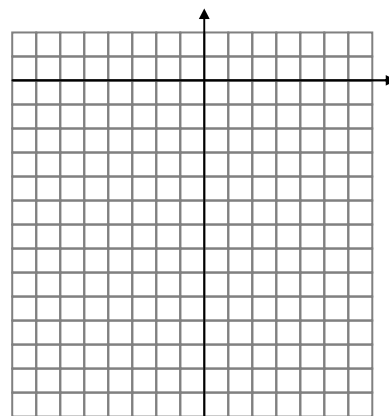
步驟 2：

x	...			0			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

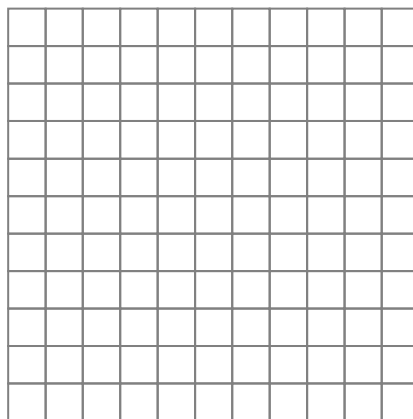
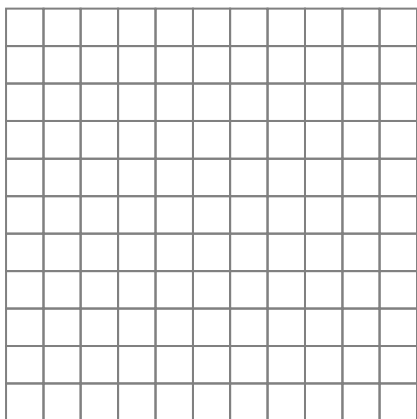
最高點坐標為_____



Ex4.21：作下列各二次函數的圖形：

(1) $y = -2x^2 + 1$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$



重點 5：二次函數 $y = ax^2$ 圖形的平移

1. 上下平移：

若將二次函數 $y = ax^2$ 圖形的向上平移 k 單位，得新圖形函數為 $y = ax^2 + k$

若將二次函數 $y = ax^2$ 圖形的向下平移 k 單位，得新圖形函數為 $y = ax^2 - k$

y $\left\{ \begin{array}{l} \text{上} + \\ \text{下} - \end{array} \right.$

2. 左右平移：

若將二次函數 $y = ax^2$ 圖形的向左平移 h 單位，得新圖形函數為 $y = a(x + h)^2$

若將二次函數 $y = ax^2$ 圖形的向右平移 h 單位，得新圖形函數為 $y = a(x - h)^2$

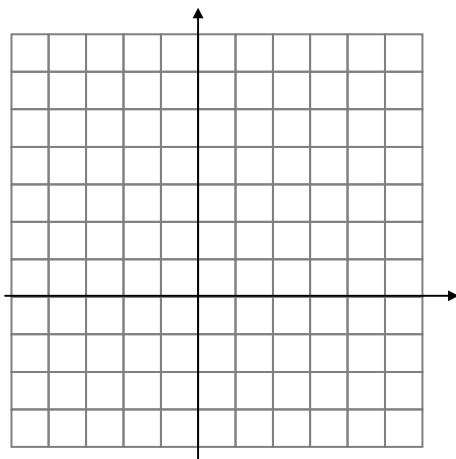
x $\left\{ \begin{array}{l} \text{左} + \\ \text{右} - \end{array} \right.$

例 5.1：試在同一坐標上作函數 $y = x^2 + 1$ 、 $y = x^2$ 、 $y = x^2 - 2$ 的圖形，則：

(1) $y = x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = x^2 + 1$ 的圖形重合

(2) $y = x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = x^2 - 2$ 的圖形重合

(3) $y = x^2 + 1$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = x^2 - 2$ 的圖形重合



Ex5.1 : (1) 二次函數 $y=2x^2+4$ 的圖形是將二次函數 $y=2x^2$ 的圖形向____平移____單位得到的圖形

(2) 二次函數 $y=5x^2+3$ 的圖形是將二次函數 $y=5x^2-2$ 的圖形向____平移____單位得到的圖形

Ex5.11 : 將二次函數 $y=5x^2$ 的圖形平移，回答下列問題：

(1) 向上平移 7 單位，得到二次函數為_____，此函數的最低點坐標為_____

(2) 向下平移 2 單位，得到二次函數為_____，此函數的最低點坐標為_____

Ex5.12 : 將二次函數 $y=-4x^2$ 的圖形平移，回答下列問題：

(1) 向下平移 4 單位，得到二次函數為_____，此函數的最高點坐標為_____

(2) 向上平移 9 單位，得到二次函數為_____，此函數的最高點坐標為_____

Ex : (1) 將二次函數 $y=4x^2$ 的圖形向上移動 3 單位，得到二次函數為_____，此函數的最低點坐標為_____

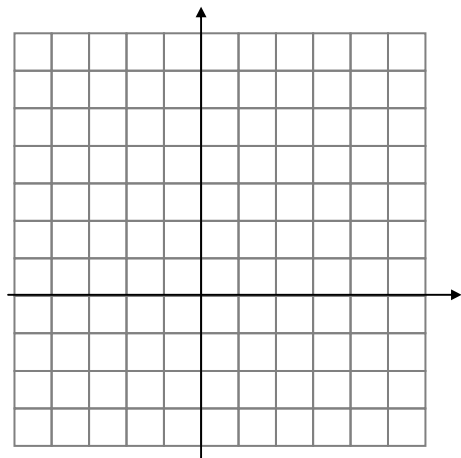
(2) 將二次函數 $y=-3x^2$ 的圖形向下移動 6 單位，得到二次函數為_____，此函數的最高點坐標為_____

例 5.2 : 試在同一坐標上作函數 $y=-2x^2+2$ 、 $y=-2x^2$ 、 $y=-2x^2-3$ 的圖形，則：

(1) $y=-2x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y=-2x^2+2$ 的圖形重合

(2) $y=-2x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y=-2x^2-3$ 的圖形重合

(3) $y=-2x^2+2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y=-2x^2-3$ 的圖形重合



Ex5.2：(1)二次函數 $y = -x^2 + 3$ 的圖形是將二次函數 $y = -x^2$ 的圖形向_____平移_____單位得到的圖形
 (2)二次函數 $y = -3x^2 - 4$ 的圖形是將二次函數 $y = -3x^2 + 5$ 的圖形向_____平移_____單位得到的圖形

例 5.3：試在坐標上作函數 $y = (x - 1)^2$ 的圖形：

解：步驟 1：頂點坐標為_____

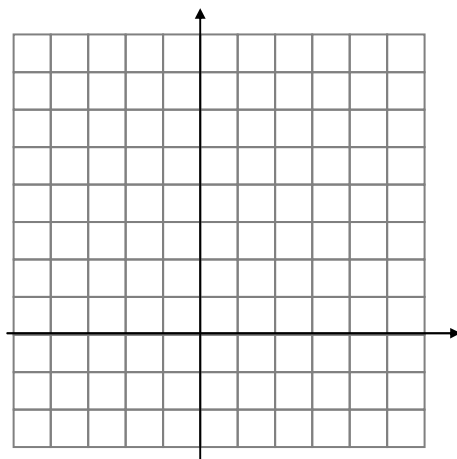
步驟 2：

x	...			1			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最低點坐標為_____



Ex5.3：試在坐標上作函數 $y = (x + 2)^2$ 的圖形：

解：步驟 1：頂點坐標為_____

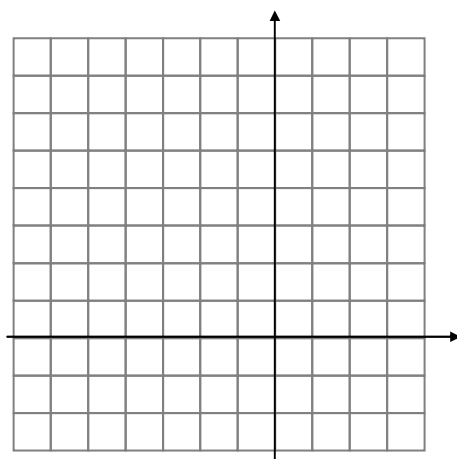
步驟 2：

x	...			-2			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

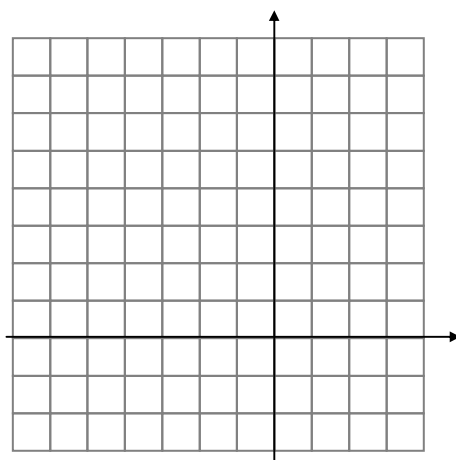
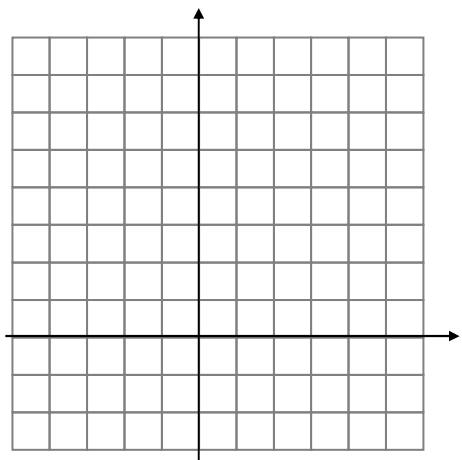
最低點坐標為_____



Ex5.31：試在坐標上作下列各函數的圖形：

(1) $y=(x-2)^2$

(2) $y=(x+4)^2$

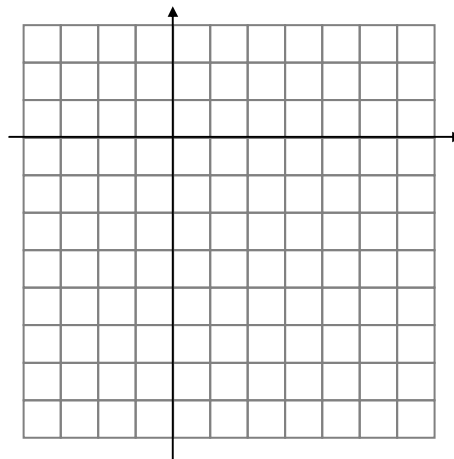


例 5.4：試在坐標上作函數 $y=-(x-1)^2$ 的圖形：

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			1			...
y



步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

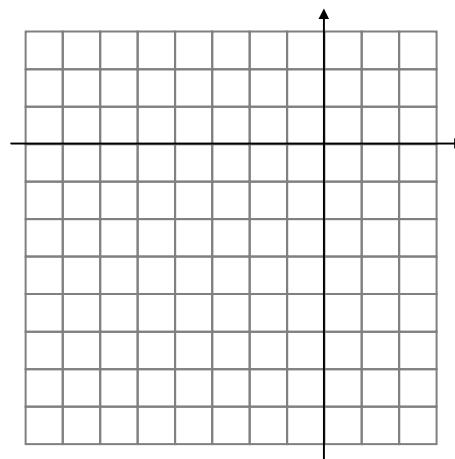
最高點坐標為_____

Ex5.4：試在坐標上作函數 $y=-(x+3)^2$ 的圖形：

解：步驟 1：頂點坐標為_____

步驟 2：

x	...			-3			...
y



步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

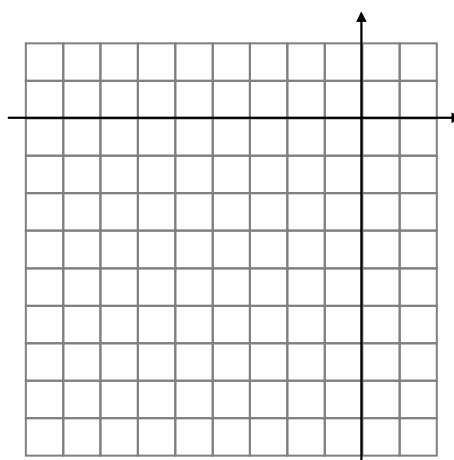
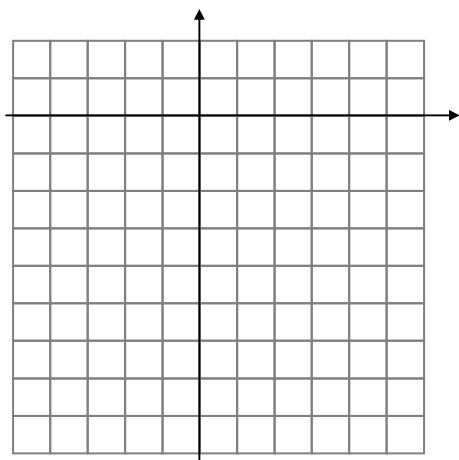
則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最高點坐標為_____

Ex5.41：試在坐標上作下列各函數的圖形：

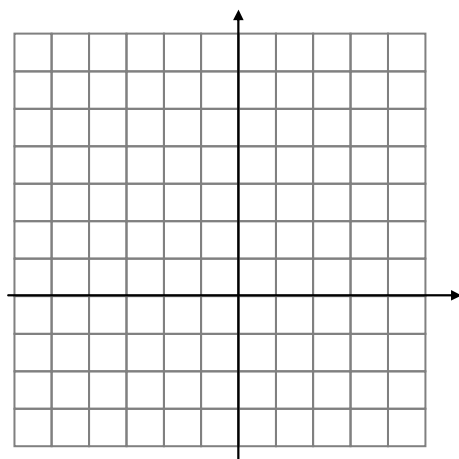
(1) $y = -(x-2)^2$

(2) $y = -(x+4)^2$



例 5.5：試在同一坐標上作函數 $y = (x+2)^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = (x-1)^2$ 的圖形，則：

- (1) $y = x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = (x-1)^2$ 的圖形重合
- (2) $y = x^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = (x+2)^2$ 的圖形重合
- (3) $y = (x+2)^2$ 的圖形向____平移____單位，會與 $y = (x-1)^2$ 的圖形重合



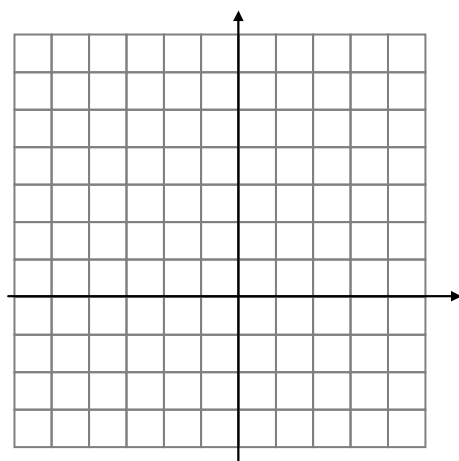
- Ex5.5：(1)二次函數 $y = 2(x+4)^2$ 的圖形是將二次函數 $y = 2x^2$ 的圖形向____平移____單位得到的圖形
 (2)二次函數 $y = 3(x-2)^2$ 的圖形是將二次函數 $y = 3(x+6)^2$ 的圖形向____平移____單位得到的圖形

Ex5.51：將二次函數 $y=3x^2$ 的圖形平移，回答下列問題：

- (1) 向右平移 5 單位，得到二次函數為_____，此函數的最低點坐標為_____
- (2) 向左平移 3 單位，得到二次函數為_____，此函數的最低點坐標為_____

例 5.6：試在同一坐標上作函數 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ 、 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的圖形，則：

- (1) $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向_____平移_____單位，會與 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的圖形重合
- (2) $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向_____平移_____單位，會與 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的圖形重合
- (3) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的圖形向_____平移_____單位，會與 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的圖形重合



- Ex5.6: (1) 二次函數 $y=-(x+3)^2$ 的圖形是將二次函數 $y=-x^2$ 的圖形向_____平移_____單位得到的圖形
- (2) 二次函數 $y=-2(x-5)^2$ 的圖形是將二次函數 $y=-2(x+1)^2$ 的圖形向_____平移_____單位得到的圖形

Ex5.61：將二次函數 $y=-2x^2$ 的圖形平移，回答下列問題：

- (1) 向左平移 7 單位，得到二次函數為_____，此函數的最高點坐標為_____
- (2) 向右平移 4 單位，得到二次函數為_____，此函數的最高點坐標為_____

重點 6：二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

1. 作二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形時，步驟如下：
 - (1) 選取關鍵點 (h, k) ，及 $x=h$ 的左右各 2 個點，再分別求其 y 值
 - (2) 利用描點法將(1)中的 5 個點，描繪在平面上
 - (3) 點與點間須以平滑曲線連接，即為二次函數圖形(拋物線)
2. 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的平移
 若將二次函數 $y=ax^2$ 圖形的**向右**平移 h 單位，**向上**平移 k 單位，
 得新圖形函數為 $y=a(x-h)^2+k$
3. 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形為**拋物線**，且
 - (1) 以直線 $x=h$ 為對稱軸的線對稱圖形
 - (2) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，其頂點 (h, k) 為此拋物線的最低點
 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，其頂點 (h, k) 為此拋物線的最高點

$y < \begin{matrix} \text{上}+ \\ \text{下}- \end{matrix}$
 $x < \begin{matrix} \text{左}+ \\ \text{右}- \end{matrix}$

例 6.1：作二次函數 $y=2(x-3)^2+5$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

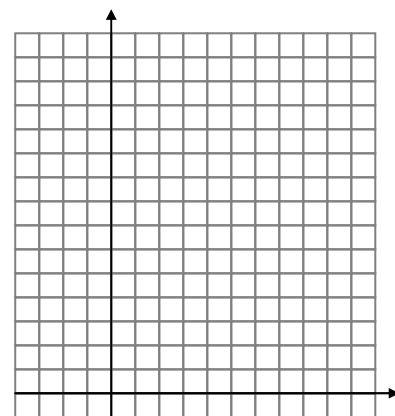
步驟 2：

x	...			3			...
y

步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最低點坐標為_____



Ex6.1：作二次函數 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$ 的圖形

解：步驟 1：頂點坐標為_____

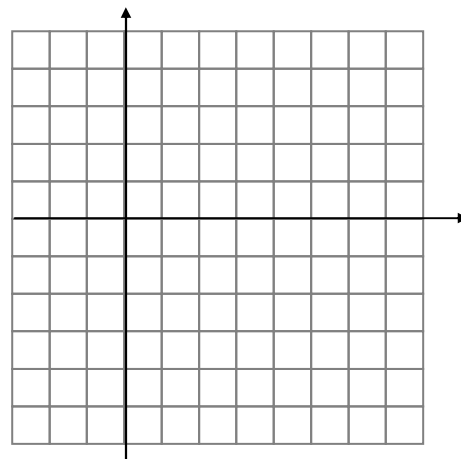
步驟 2：

x	...			2			...
y

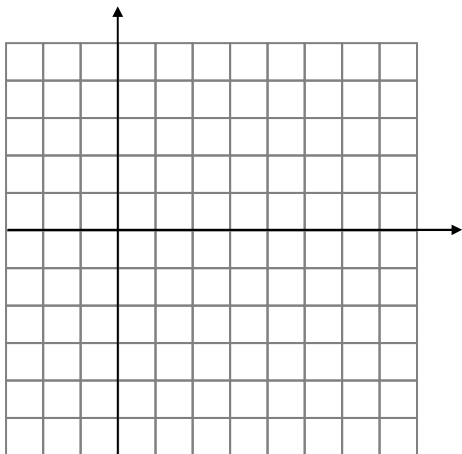
步驟 3：將(2)中的點，以平滑曲線描繪其圖形

則對稱軸方程式為_____，開口向_____，

最低點坐標為_____



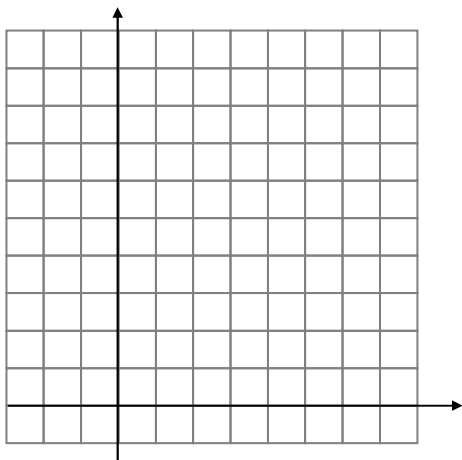
Ex6.1：作二次函數 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 3$ 的圖形



例 6.2：試在同一坐標上作函數 $y = 2(x-3)^2$ 、 $y = 2x^2$ 、 $y = 2(x-3)^2 + 5$ 的圖形，則：

由 $y = 2x^2$ 的圖形向_____平移_____單位，會與 $y = 2(x-3)^2$ 的圖形重合

再由 $y = 2(x-3)^2$ 的圖形向_____平移_____單位，會與 $y = 2(x-3)^2 + 5$ 的圖形重合



Ex6.2：將二次函數 $y = -2x^2$ 的圖形向_____平移_____單位得到 $y = -2(x+1)^2$ 的圖形

再將函數 $y = -2(x+1)^2$ 的圖形向_____平移_____單位得到的圖形 $y = -2(x+1)^2 - 3$

例 6.3：求下列各二次函數圖形的頂點坐標：

(1) $y = -3(x-5)^2 - 9$ 的頂點坐標為_____

(2) $y = 7(x+4)^2 + 6$ 的頂點坐標為_____

Ex6.3：求下列各二次函數圖形的頂點坐標：

(1) $y=4(x-7)^2-1$ 的頂點坐標為_____

(2) $y=-2(x+5)^2+3$ 的頂點坐標為_____

例 6.4：有一個二次函數，其圖形頂點為 $(-2, 5)$ ，且通過點 $(1, -4)$ ，試求此二次函數

Ex6.4：有一頂點為 $(0, -2)$ 個二次函數圖形，通過點 $(-1, 2)$ ，試求此二次函數

Ex6.41：有一個二次函數，其圖形頂點為 $(0, 5)$ ，且通過點 $(1, 3)$ ，試求此二次函數

例 6.5：已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的最低點為 $(-1, -3)$ ，且 $|a|=2$ ，試求此二次函數及其對稱軸方程式

Ex6.5：已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的最高點為 $(-2, 3)$ ，且 $|a|=3$ ，試求此二次函數及其對稱軸方程式

Ex：已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的最高點為 $(-3, 5)$ ，且 $|a| = \frac{1}{2}$ ，試求此二次函數及其對稱軸方程式

例 6.6：已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形可由二次函數 $y=-3x^2$ 的圖形平移後得到，其對稱軸為直線 $x-1=0$ ，且圖形通過點 $(2, 1)$ ，則此二次函數圖形的頂點為何？

Ex6.6：已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形可由二次函數 $y=2x^2$ 的圖形平移後得到，其對稱軸為直線 $x+2=0$ ，且圖形通過點 $(1, 13)$ ，則此二次函數圖形的頂點為何？

Ex：已知二次函數 $y=-4x^2$ 的圖形平移後可得 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，其對稱軸為直線 $x+3=0$ ，且圖形通過點 $(-2, 3)$ ，則此二次函數圖形的頂點為何？

Ex：若 $(1, a)$ ， $(2, b)$ ， $(\frac{5}{3}, c)$ ， $(44, d)$ 四個點都在二次函數 $y=2(x-\frac{5}{3})^2$ 的圖形上，試比較 a, b, c, d 的大小關係