Ch 3.1 證明與推理

重點 1：幾何證明

1.證明：由「已知條件」或「已確認的性質」推論出結論的過程，稱為證明

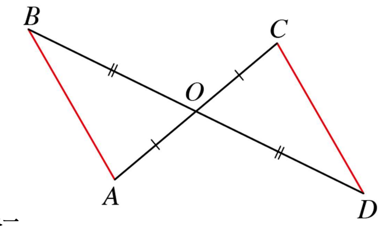
2.證明的格式：

已知：題目給的條件

求證：題目所要得到的結論

證明：運用「已知條件」或「已確認的性質」所做的推論過程

註：符號「因為∵」、「所以∴」



3.證明思考步驟如下：(參考右圖)

(1)如何判別兩直線平行呢？

當兩直線被一直線所截時，則判別兩直線平行有：

若同位角相等，或內錯角相等，或同側內角互補，則兩直線平行

註：由兩直線平行，可逆推得同位角相等，或內錯角相等，或同側內角互補

(2)哪些角可以用來判別 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 平行？

由圖形中發現∠A、∠C 是一組內錯角，如果∠A＝∠C 成立，就可以推得 $\overline{AB} // \overline{CD}$

註：也可以觀察另一組內錯角∠B、∠D 的關係，且逆推也成真

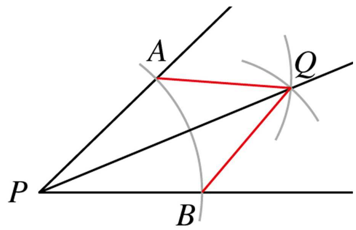
(3)如何知道∠A＝∠C 呢？

若由圖中知道△AOB 和△COD 全等，就可以得到∠A＝∠C

(4)如何知道△AOB≅△COD 呢？因為 $\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$、對頂角相等∠AOB＝∠COD，則根據 SAS 全等性質可推得△AOB≅△COD

例 1.1：已知 $\overline{PA}=\overline{PB}$，$\overline{AQ}=\overline{BQ}$，如右圖

求證：$\overrightarrow{PQ}$是∠APB 的角平分線



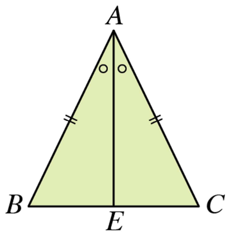
證明：

Ex1.1：如右圖，等腰ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠A 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 E 點

試說明 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{AE}$ 平分 $\overline{BC}$

請由上段的敘述，判斷(A)~(D)選項中，哪幾個選項是已知？

哪幾個選項是求證的結論？



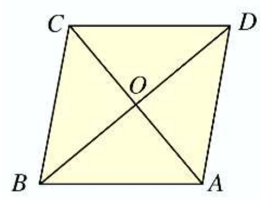
(A) $\overline{AB}=\overline{AC}$　　(B) $\overline{AE}$ 平分∠A

(C) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$　　(D) $\overline{AE}$ 平分 $\overline{BC}$

Ex：如右圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{OA}=\overline{OC}$ ，$\overline{OB}=\overline{OD}$ 且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

說明四邊形 ABCD 是菱形

上面的敘述中，已知的條件有哪些？求證的結論有哪些？



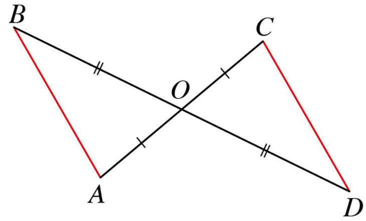
解：已知的條件：

求證的結論：

例 1.2：已知：如右圖，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，且 $\overline{AO}=\overline{CO}$ ，$\overline{BO}=\overline{DO}$

求證：$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$

證明：



重點 2：幾何問題的證明

1.常用來當做幾何推理時的依據：(已知事實)

(1)畢氏定理 (2)三角形的基本性質 (3)三角形的全等性質

(4)角平分線和垂直平分線的性質 (5)樞紐定理與逆樞紐定理

(6)平行線的性質與判別性質 (7)平行四邊形的性質

(8)中點連線性質 (9)平行線截比例線段性質 (10)平行線截比例線段性質的應用

(11)三角形內分比性質 (12)三角形的相似性質 (13)圓的基本性質

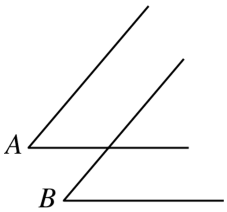
2.利用三角形全等性質，證明結果

◎平行線性質的應用

例 2.1：已知：如右圖，∠A、∠B 的兩邊分別平行

求證：∠A＝∠B

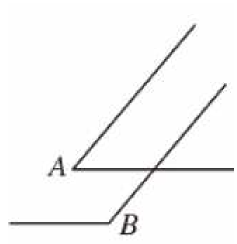
證明：



Ex2.1：如右圖，∠A、∠B 的兩邊分別平行

求證：∠A＋∠B＝180°

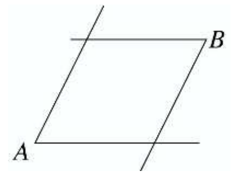
證明：



Ex：已知：如右圖∠A、∠B 的兩邊分別平行

求證：∠A＝∠B

證明：

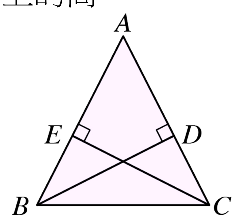


◎等腰三角形兩腰上的高相等

例 2.2：已知：如右圖，等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上的高。

求證：$\overline{BD}=\overline{CE}$

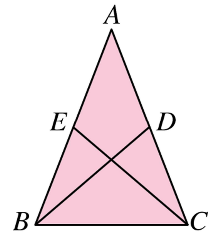
證明：



另證：利用面積相等

Ex2.2：已知：如右圖，等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，D、E 分別為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點

求證：$\overline{BD}=\overline{CE}$



證明：(1)∵D、E 分別為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\underline{\qquad}$

又$\overline{AB}=\overline{AC}$，得$\overline{AD}=\underline{\qquad}$

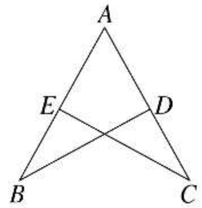
(2)在△ABD 和△ACE 中，

$$\because \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

∴△ABD≅△ACE (根據$\underline{\qquad\quad}$性質)，故$\overline{BD}=\overline{CE}$(對應邊相等)

Ex：已知：如右圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$

求證：$\overline{BD}=\overline{CE}$



證明：在△ABD 和△ACE 中，

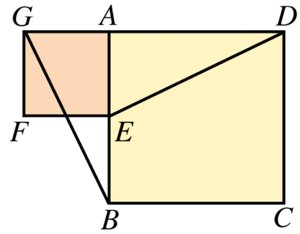
$$\because \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

∴△ABD≅△ACE (根據$\underline{\qquad\quad}$性質)，故$\overline{BD}=\overline{CE}$(對應邊相等)

◎三角形全等性質的應用

例 2.3：已知：如右圖，四邊形 ABCD 及四邊形 AEFG 皆為正方形

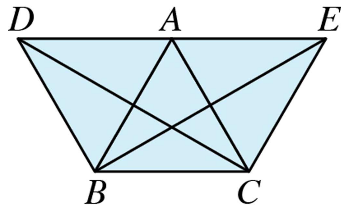
求證：$\overline{DE}=\overline{BG}$



證明：

Ex2.3：已知：如右圖，在正△ABC 的兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、往外側作正△ABD、正△ACE

求證： $\overline{BE} = \overline{CD}$



證明：(1)∵△ABC、△ABD、△ACE 均為正三角形

∴∠DAB＝∠BAC＝∠CAE＝_____度

得∠BAE＝∠DAC＝_____度

(2)在△ABE 和△ADC 中，

∵ { ________________

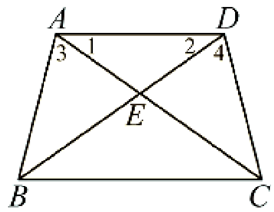
____

____

∴△ABE≅△ADC (根據_______性質)，故 $\overline{BE} = \overline{CD}$ (對應邊相等)

例 2.4：已知：如右圖，∠1＝∠2，∠3＝∠4

求證： $\overline{AB} = \overline{DC}$



證明：在△ADB 和△DAC 中，

∵(1) ∠1＝∠2 (　　　)

(2) ∠DAB＝∠1＋∠3＝∠2＋_____＝_____

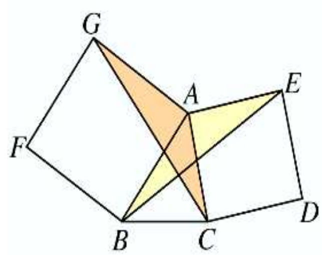
(3) ______＝______ (共用邊)

∴△ADB≅△DAC (根據______全等性質)，故 $\overline{AB} = \overline{DC}$ (_________)

Ex2.4：如右圖，在△ABC 的兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ ，往外側作正方形 ABFG 及正方形△ACDE

求證： $\overline{BE} = \overline{CG}$

證明：

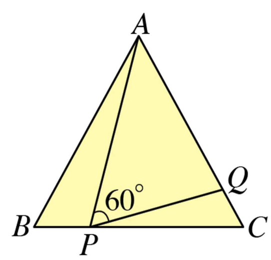


◎相似形的應用

例 2.5：已知：如右圖，△ABC 為正三角形，P、Q 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且∠APQ＝60°

求證：△ABP～△PCQ

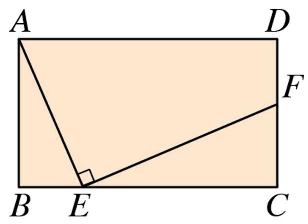
證明：



Ex2.5：在空格內填入適當的答案：

已知：如右圖，四邊形 ABCD 為長方形，E、F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 上，且∠AEF＝90°

求證：△ABE～△ECF



證明：(1)∵四邊形 ABCD 為長方形，∴∠B＝∠C＝_____度

又△ABE 是直角三角形，∴∠1＋∠2＝_____度……①

且∠AEF＝90°，∴∠3＋∠2＝_____度……②

由①、②可得∠1＝∠3

(2)在△ABE 和△ECF 中，

$\because \begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle 1 = \angle 3 \end{cases}$，∴△ABE～△ECF(根據_____相似性質)

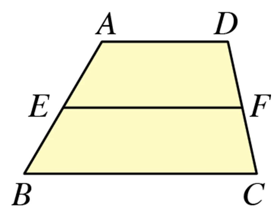
重點 3：梯形兩腰中點連線性質

1.梯形兩腰中點連線與兩底平行

如右圖，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{EF} // \overline{BC} // \overline{AD}$

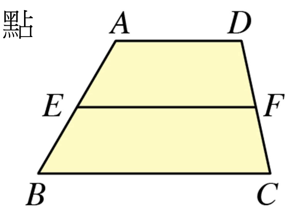
2.梯形兩腰中點的連線段長等於兩底和的一半

如右圖，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$



例 3.1：已知：如右圖，梯形 ABCD 中， $\overline{AD} // \overline{BC}$ ，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點

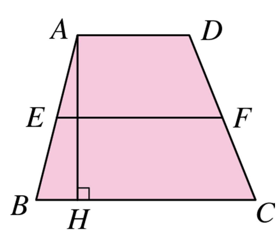
求證： $\overline{EF} // \overline{AD} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$



證明：

Ex3.1：如右圖，梯形 ABCD 中， $\overline{AD} // \overline{BC}$ ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{EF}$ 為兩腰中點連線段

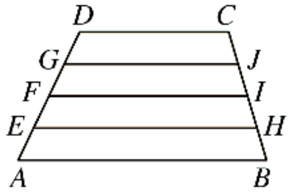
若 $\overline{EF} = \overline{AH} = 10$ 公分，則梯形 ABCD 面積為多少？



解：

Ex：如右圖，梯形 ABCD 中，E、F、G 為 $\overline{AD}$ 的四等分點，且 $\overline{AB}$ // $\overline{EH}$ // $\overline{FI}$ // $\overline{GJ}$ // $\overline{DC}$

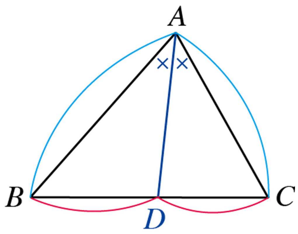
若 $\overline{AB}$ ＝10，$\overline{DC}$ ＝6，則 $\overline{EH}$ 、$\overline{FI}$ 、$\overline{GJ}$ 的長度分別為多少？



重點 4：三角形內分比性質

性質：如右圖，在△ABC 中，若∠BAC 的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點

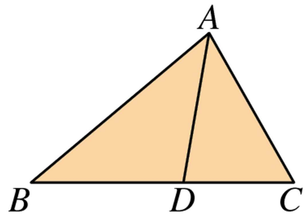
則 $\overline{BA}$ ：$\overline{AC}$ ＝ $\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$



例 4.1：已知：如右圖，在△ABC 中，∠BAC 的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點

求證：$\overline{BA}$ ：$\overline{AC}$ ＝ $\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$

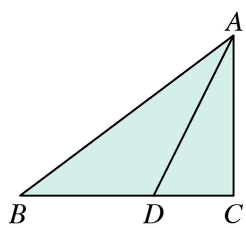
證明：



Ex4.1：如右圖，△ABC 中，∠BAC 的角平分線與 $\overline{BC}$ 相交於 D 點。

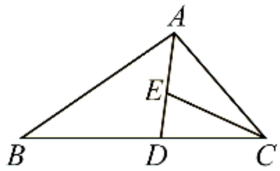
若 $\overline{AB}$ ＝5、$\overline{AC}$ ＝3。則：

(1) $\overline{BD}$ ：$\overline{DC}$ ＝？　　(2)△ABD 面積：△ACD 面積＝？



Ex：如右圖，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 分別平分∠BAC、∠ACB，若 $\overline{AB}=16$、$\overline{BC}=21$、$\overline{AC}=12$，△CDE 面積＝a，則：

(1) $\overline{BD}:\overline{DC}=$？　(2)以 a 表示△ACE 面積＝？



重點 5：代數證明

1.偶數與奇數的表示法：

(1)每一個偶數都是「2 的倍數」，所以偶數都可用 $2k$，(k 是整數)的型式來表示

(2)每一個奇數都是某個「偶數加 1」，所以奇數可用 $2k+1$，(k 是整數)的型式來表示

每一個奇數都是某個「偶數減 1」，所以奇數也可用 $2k-1$，(k 是整數)的型式來表示

註：正整數中的奇數和偶數都有無限多個

2.性質：

(1)一個偶數與一個奇數的和是「奇數」，亦即偶數＋奇數＝奇數

一個偶數與一個偶數的和是「偶數」，亦即偶數＋偶數＝偶數

一個奇數與一個奇數的和是「偶數」，亦即奇數＋奇數＝偶數

(2)任意一個奇數 x 的平方，一定是奇數

任意一個偶數 x 的平方，一定是偶數

例 5.1：已知 a 是整數，判斷下列各式所代表的數是奇數還是偶數，或都有可能：

(1) $a+1$：_______　(2) $a+2$：_______　(3) $2a+2$：_______

(4) $2a+1$：_______　(5) $2(2a-1)$：_______

Ex5.1：已知 x 是整數，判斷下列各式所代表的數是奇數還是偶數，或都有可能：

(1) $x+3$：_______　(2)$3x-3$：_______

(3) $2(x+1)$：_______　(4) $2(x+1)-1$：_______

例 5.2：(1)證明：一個偶數與一個奇數的和是「奇數」

(2)證明：任意兩個偶數的和是「偶數」

(3)證明：一個奇數與一個奇數的和是「偶數」

證明：

Ex5.2：已知 k 是整數，判斷下列敘述何者正確？

(A)若 a 是偶數，則可以假設 $a=k+2$

(B)若 b 是奇數，則可以假設 $b=2k+1$

(C)若 a 是偶數，b 也是偶數，則可以假設 $a=2k$，$b=2k$

(D)若 a 是偶數，b 是奇數，則可以假設 $a=2k$，$b=2k+1$

例 5.3：已知 a 是任意一個奇數

求證：a^2 也是奇數

證明：

Ex5.3：已知 a 是任意一個偶數

求證：a^2 也是偶數

證明：

Ex：關於奇數、偶數的判別，下列敘述何者正確？

(A)奇數與偶數的和是偶數　　(B)兩個偶數和是奇數

(C)兩個奇數和是偶數　　(D)奇數與偶數的和的平方是偶數

Ex：已知 k 為正整數，求證：$(k+1)^2-k^2$ 是奇數

重點 6：平方差公式的應用

1.平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

註：$(a+b)$、$(a-b)$都是 a^2-b^2 的因數；而 a^2-b^2 是$(a+b)$或$(a-b)$的倍數

2.性質：

(1)若 $a-b>0$，則 $a>b$

(2)若 a、b 為兩個正數，且 $a>b$，則 $a^2>b^2$

註：若 $a>b$，則 $a^2>b^2$ 不一定成立

例 6.1：已知：直角三角形的三邊長為 a、b、c (a、b、c 均為正整數)，其中 c 為斜邊

求證：a^2 是$(b+c)$的倍數

證明：

Ex6.1：已知：k 為正整數

求證：$(k+2)^2-k^2$ 是 4 的倍數

證明：

Ex：已知：a 為正偶數

求證：a^2 是 4 的倍數

證明：

例 6.2：已知：a、b 為兩個正數，且 $a>b$，

求證：$a^2>b^2$

證明：

Ex6.2：已知：a、b 為兩個正數，且 $a^2>b^2$

求證：$a>b$

證明：

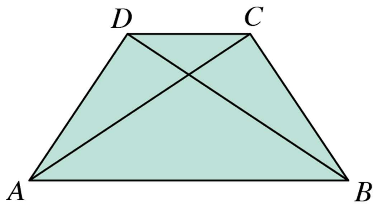
Ex：已知：a、b 為兩個負數，且 $a>b$

求證：$a^2<b^2$

證明：

Ch 3.1 證明與推理　自我評量

1.已知：如右圖，∠DAB＝∠CBA，∠DBA＝∠CAB



求證：$\overline{AC}=\overline{BD}$

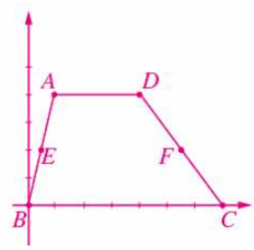
證明：在△ABC 和△BAD 中，

$$\because \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \text{(已知)} \\ \underline{\qquad\qquad} \text{(共用邊)} \\ \underline{\qquad\qquad} \text{(已知)} \end{cases}，\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD \text{ (ASA 全等性質)}$$

故 $\overline{AC}=\overline{BD}$ (對應邊相等)

2.直角坐標平面上有 A(1，4)、B(0，0)、C(7，0)、D(4，4)四點，若 E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{EF}$ 長為多少？

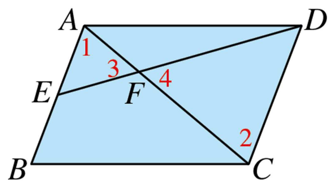
解：



3.在空格內填入適當的答案：

已知：如右圖，在平行四邊形 ABCD 中，E 為 $\overline{AB}$ 的中點，F 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{ED}$ 的交點

求證：$\overline{CF}=2\overline{AF}$



證明：(1)在△AEF 和△CDF 中，

$$\because \begin{cases} \angle 1=\angle 2 \text{ (\underline{\qquad})} \\ \angle\underline{\quad}=\angle\underline{\quad} \text{ (\underline{\qquad})} \end{cases}，\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDF \text{ (AA 相似性質)}$$

(2) E 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AE}=$_____ $\overline{AB}$ ，

又 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ，$\overline{AE}=$__________ $\overline{CD}$

得 $\overline{AE}:\overline{CD}=$_____ : ______

又 $\overline{AF}:\overline{CF}=\overline{AE}:\overline{CD}=$_____ : ______

故 $\overline{CF}=2\overline{AF}$

4.已知：a、b 均為奇數，求證：ab 也是奇數

證明：