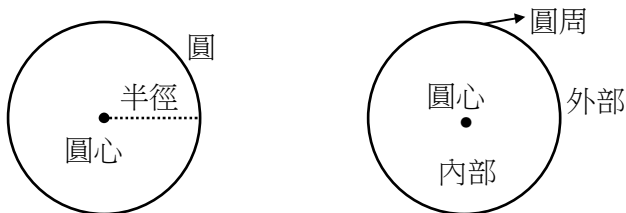


Ch 2.1 點、直線、圓之間的位置關係

**重點 1：點與圓的位置關係**

1.圓的定義：在平面上，與一固定點距離相等的所有點組成的圖形稱為圓，如下圖左而此固定點稱為**圓心**，相等的距離稱為**半徑**



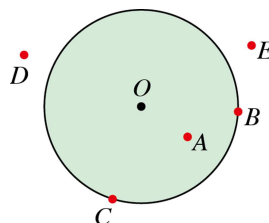
2.圓與平面：圓將其所在平面分成圓的**內部**(包含圓心)與**圓周**，以及圓的**外部**，如上圖右

3.在平面上，任一點 P 與圓 O 的位置關係，有下列三種情形：設圓 O 半徑為  $r$

點與圓的位置關係	點在圓內	點在圓上	點在圓外
圖示			
點到圓心距離與半徑的比較	$\overline{OP} < r$	$\overline{OP} = r$	$\overline{OP} > r$

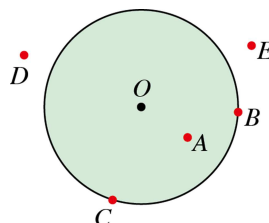
例 1.1：1.根據下圖，判斷各點與圓 O 的位置關係：

- (1)在圓外的點是：\_\_\_\_\_
- (2)在圓上的點是：\_\_\_\_\_
- (3)在圓內的點是：\_\_\_\_\_



2.若此圓的半徑為  $r$ ，分別作  $\overline{AO}$ 、 $\overline{BO}$ 、 $\overline{CO}$ 、 $\overline{DO}$ 、 $\overline{EO}$  五條線段，試比較這五條線段與  $r$  的大小關係。(在空格中填入  $>$ 、 $<$  或  $=$ )

- (1)  $\overline{AO}$  \_\_\_\_\_  $r$
- (2)  $\overline{BO}$  \_\_\_\_\_  $r$
- (3)  $\overline{CO}$  \_\_\_\_\_  $r$
- (4)  $\overline{DO}$  \_\_\_\_\_  $r$
- (5)  $\overline{EO}$  \_\_\_\_\_  $r$



Ex1.1：如右圖，圓 O 的半徑為  $r$ ，分別作  $\overline{AO}$ 、 $\overline{BO}$ 、 $\overline{CO}$ 、 $\overline{DO}$ 、 $\overline{EO}$  五條線段，試比較這五條線段與  $r$  的大小關係。(在空格中填入  $>$ 、 $<$  或  $=$ )

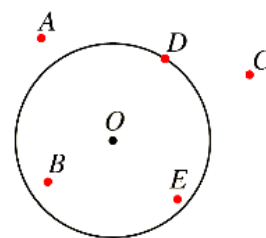
(1)  $\overline{AO}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $r$

(2)  $\overline{BO}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $r$

(3)  $\overline{CO}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $r$

(4)  $\overline{DO}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $r$

(5)  $\overline{EO}$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $r$



例 1.2：若圓 O 的半徑為 5，且  $\overline{OA} = 4$ ， $\overline{OB} = 5$ ， $\overline{OC} = 10$ ， $\overline{OD} = 11$ ，則 A，B，C，D 四點中，在圓 O 外部的點有  $\underline{\hspace{1cm}}$  個？

Ex1.2：已知圓 O 的直徑為 10，若有一點 P 位於圓 O 內部，則 P 點與圓 O 的距離  $\overline{OP}$  之範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$

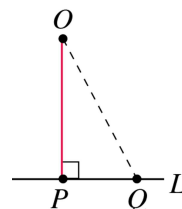
**重點 2：直線與圓的位置關係**

1. 點到直線的最短距離：

線外一點到某直線的垂直線段長，稱為該點到直線的距離。如右圖

$\overline{OP}$  為點 O 到直線 L 的距離，其中 P 點是 O 到 L 的垂足，

註：若 Q 是 L 上異於 P 的任意一點，則  $\overline{OQ} > \overline{OP}$



2. 在平面上，一直線 L 與圓 O 的位置關係，有下列三種情形，設圓 O 半徑為  $r$

直線與圓的位置關係	直線 L 與圓 O 不相交	直線 L 為圓 O 的切線	直線 L 為圓 O 的割線
交點個數	0	1	2
圖示			
直線與圓心的距離	$\overline{OP} > r$	$\overline{OP} = r$	$\overline{OP} < r$

註：(1) 圓心到切線的距離等於圓的半徑，圓心與切點的連線必垂直過此切點的切線

(2) 過圓 O 上一點 P，且與  $\overline{OP}$  垂直的直線，即為此圓 O 的切線

例 2.1：已知圓  $O$  的半徑  $\overline{OA} = r$ ，且直線  $L \perp \overline{OA}$  於  $A$  點。

依據右圖，在下列各空格中填入適當的答案

(1) ①直線  $L$  與圓  $O$  有\_\_\_\_\_個交點

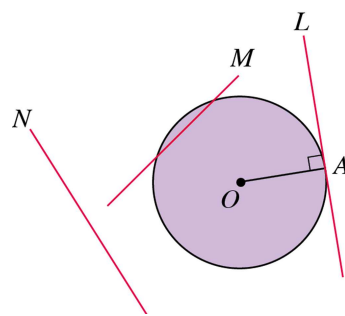
②直線  $M$  與圓  $O$  有\_\_\_\_\_個交點

③直線  $N$  與圓  $O$  有\_\_\_\_\_個交點

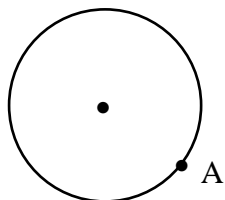
(2) ①哪一條直線是圓  $O$  的切線？\_\_\_\_\_

②哪一條直線是圓  $O$  的割線？\_\_\_\_\_

(3) 設圓心  $O$  到直  $M$ 、 $N$  的距離分別為  $r_1$ 、 $r_2$ ，則  $r$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  的大小順序為\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_



Ex2.1：如下圖， $A$  是圓  $O$  上一點，試過  $A$  作圓  $O$  的切線



例 2.2：已知圓  $O$  的直徑為 15 公分，而圓心  $O$  到四條直線  $L$ 、 $M$ 、 $N$ 、 $H$  的距離分別為 15 公分、10 公分、7.5 公分、5 公分，則：

(1) 此四條直線分別和圓  $O$  有\_\_\_\_\_個交點？

(2) 哪幾條是切線？\_\_\_\_\_

(3) 哪幾條是割線？\_\_\_\_\_

Ex2.2：直線  $L$  與圓  $O$  恰好相交於一點  $P$ ，已知圓  $O$  的直徑為 10 公分，求圓心  $O$  到  $L$  的距離為多少公分？

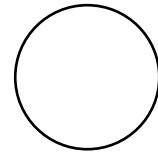
例 2.3：已知圓  $O$  的半徑為 10 公分，且直線  $L$  與圓  $O$  相交於兩點，則圓心  $O$  到直線  $L$  的距離可能為下列哪些選項？(A) 2 公分 (B) 8 公分 (C) 10 公分 (D) 15 公分

Ex2.3：已知直線 L 與圓 O 的距離為 12，若圓 O 的直徑為 12，則直線 L 與圓 O 的關係為何？

- (A)相切 (B)相割 (C)不相交 (D)以上皆是

Ex：已知圓 O 的直徑為 10 公分，且直線 L 與圓 O 的距離為 3 公分，若有另一直線 M // L，且直線 L 與直線 M 的距離為 6 公分，則直線 M 與圓 O 的關係為何？

- (A)相交於一點 (B)相交於兩點 (C)不相交 (D)以上皆是

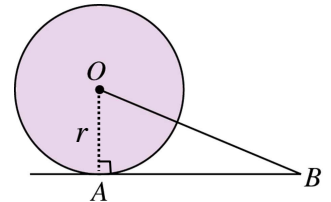


**重點 3：圓的切線段長**

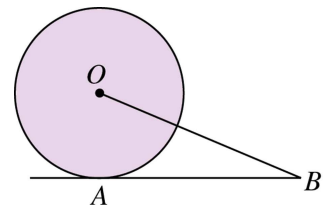
1.切線段長：如右圖，圓外一點 B， $\overline{AB}$  與圓 O 相切於 A 點，則  $\overline{AB}$  稱為切線段長

2.切線段長求法：

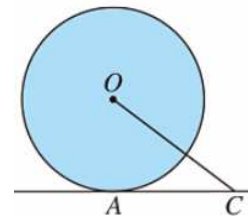
設圓 O 半徑為  $r$ ，在直角  $\triangle OAB$  中，由畢氏定理， $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - r^2}$



例 3.1：如右圖，直線 AB 為圓 O 的切線，切點為 A，若圓 O 半徑為 5、 $\overline{OB} = 13$ ，則切線段  $\overline{AB}$  的長為多少？

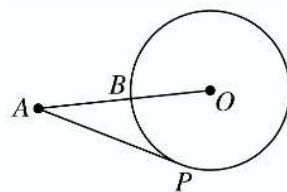


Ex3.1：如右圖，直線 AC 切圓 O 於 A 點， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{OC} = 5$ ，則圓 O 的半徑為多少？



Ex：已知  $\overline{PA}$  切圓 O 於 A 點，若圓 O 的半徑為 5，且  $\overline{OP} = 13$ ，則  $\overline{PA}$  為多少？

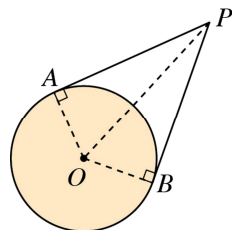
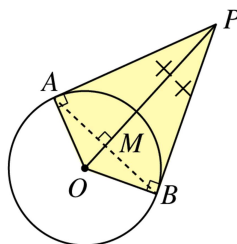
Ex：如右圖， $\overline{PA}$  為圓 O 的切線，P 為切點，若  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AP} = 12$   
則圓 O 的半徑為多少？



**重點 4：圓的切線段長性質**

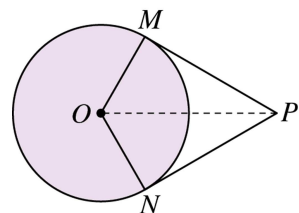
如右圖，設 P 為圓 O 外一點， $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$  分別切圓 O 於 A、B 兩點，則：

- (1)  $\triangle POA$  全等於  $\triangle POB$  (根據 RHS 全等性質)
- (2)  $\overline{PA} = \overline{PB}$  (切線段長相等)
- (3)  $\angle APO = \angle BPO$  ( $\overline{OP}$  為  $\angle APB$  的分角線)
- (4) 四邊形 OAPB 為鳶形 (滿足鳶形性質)
- (5) 連接  $\overline{AB}$ ，則  $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ ，且  $\overline{AM} = \overline{BM}$   
( $\overline{OP}$  為  $\overline{AB}$  的中垂線)



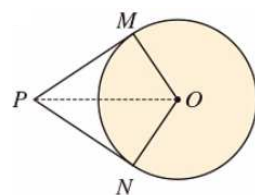
例 4.1：如右圖，P 為圓 O 外一點， $\overleftrightarrow{PM}$  與  $\overleftrightarrow{PN}$  為圓 O 的切線，M、N 為切點。  
已知圓 O 半徑為 5 公分、 $\angle MOP = 60^\circ$ 。求：

- (1) 四邊形 OMPN 的周長
- (2)  $\angle MPN$  的度數
- (3)  $\overline{MN}$  的長度



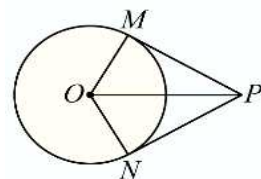
Ex4.1：如右圖，P 為圓 O 外一點， $\overleftrightarrow{PM}$  與  $\overleftrightarrow{PN}$  為圓 O 的切線，M、N 為切點。  
若圓 O 半徑為 9 公分， $\overline{PM} = 12$  公分，則：

- (1)  $\overline{OP} = ?$
- (2)  $\overline{MN} = ?$



Ex：如右圖，P 為圓 O 外一點， $\overleftrightarrow{PM}$  與  $\overleftrightarrow{PN}$  分別切圓 O 於 M、N 兩點。  
已知圓 O 半徑為 3、 $\angle MON = 120^\circ$ 。求：

- (1)  $\angle MPO$  的度數？
- (2)  $\overline{PM}$  的長度？

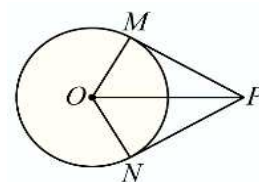


Ex：如右圖，P 為圓 O 外一點， $\overrightarrow{PM}$  與  $\overrightarrow{PN}$  分別切圓 O 於 M、N 兩點。

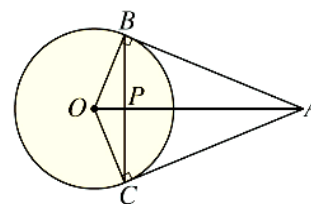
若  $\overline{MO} = 5$ ， $\overline{PO} = 13$ 。則：

(1) 四邊形 PMON 的周長

(2)  $\overline{MN}$  的長度



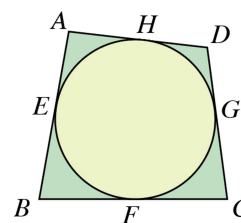
Ex：如右圖，圓 O 的半徑為 5 公分，A 為圓外一點， $\overline{AB}$  與  $\overline{AC}$  分別切圓 O 於 B、C 兩點。且  $\overline{BP} = \frac{60}{13}$  公分，四邊形 ABOC 的面積為 60 平方公分，求  $\overline{OA}$  與  $\overline{AC}$  的長度分別為多少？



**重點 5：圓外切四邊形**

1. 意義：如右圖，若四邊形 ABCD 各邊分別與圓相切於 E、F、G、H 四點，此時稱四邊形 ABCD 為圓外切四邊形

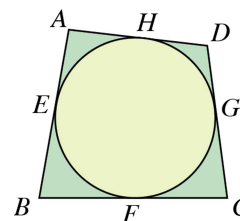
2. 性質：圓外切四邊形 ABCD 中， $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$



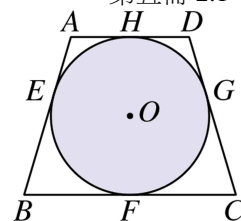
◎性質：一圓外切四邊形，則此四邊形兩組對邊的和會相等

如右圖，圓外切四邊形 ABCD 中，試證明  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

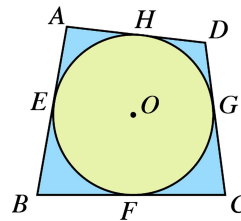
證明：



例 5.1：如右圖，四邊形  $ABCD$  為等腰梯形，其中  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，且各邊分別與圓  $O$  相切於  $E、F、G、H$  四點，若  $\overline{AB} = 13$  公分、圓  $O$  半徑為 6 公分，則等腰梯形  $ABCD$  的周長、面積分別為多少？

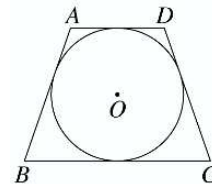


Ex5.1：如右圖，四邊形  $ABCD$  各邊分別與圓  $O$  相切於  $E、F、G、H$  四點，若  $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{CD} = 9$ ，則四邊形  $ABCD$  的周長為多少？



Ex：如右圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且圓  $O$  與梯形  $ABCD$  的各邊相切，若圓  $O$  的半徑為 12， $\overline{AB} = 25$ ，則：

- (1)  $\overline{AD} = ?$                       (2) 梯形  $ABCD$  的面積為多少？

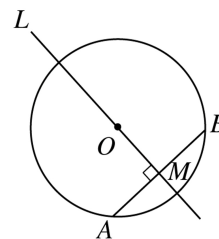


**重點 6：弦**

1. 弦：連接圓上任意兩點所得到的線段稱為弦，如右圖，弦  $AB$

2. 弦的性質：

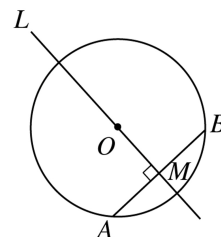
- (1) 過圓心且與弦垂直的直線，必平分此弦，如右圖直線  $L$
- (2) 過圓心且平分弦的直線，必垂直此弦
- (3) 一弦的垂直平分線必通過其所在圓的圓心



◎如右圖， $\overline{AB}$  是圓  $O$  上的一弦，直線  $L$  通過圓心，且垂直  $\overline{AB}$  於  $M$  點

試證明： $\overline{MA} = \overline{MB}$

證明：



◎如右圖， $\overline{AB}$  是圓  $O$  上的一弦，直線  $L$  通過圓心及  $\overline{AB}$  的中點  $M$ 。證明  $L \perp \overline{AB}$

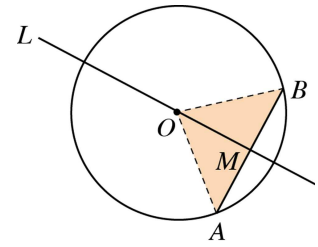
證明：在  $\triangle OMA$  和  $\triangle OMB$  中，

$$\because \begin{cases} \overline{MA} = \underline{\hspace{2cm}} & (L \text{ 通過 } \overline{AB} \text{ 的中點 } M) \\ \overline{OA} = \underline{\hspace{2cm}} & (\text{圓 } O \text{ 半徑}) \\ \overline{OM} = \overline{OM} & (\text{共用邊}) \end{cases}$$

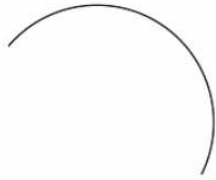
$\therefore \triangle OMA \cong \triangle OMB$  (\_\_\_\_\_ 全等性質)，

得  $\angle OMA = \underline{\hspace{2cm}}$ ，又  $\angle OMA + \angle OMB = \underline{\hspace{2cm}}$  度，

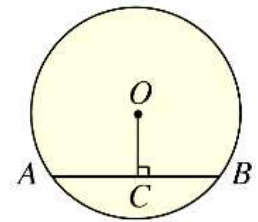
$\therefore \angle OMA = \underline{\hspace{2cm}} = 90^\circ$ ，故  $L \perp \overline{AB}$ 。



例 6.1：右圖為某一個圓的部分圓弧，找出此圓的圓心



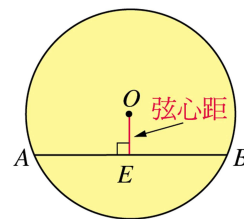
Ex6.1：如右圖，已知弦  $\overline{AB}$  的弦心距  $\overline{OC} = 6$ ， $\overline{AB} = 8$ ，求圓  $O$  的半徑



**重點 7：弦心距**

1.弦心距：圓心到弦的距離稱為此弦的弦心距

如右圖， $\overline{AB}$  為圓  $O$  上的一弦， $\overline{OE}$  為弦  $\overline{AB}$  的弦心距  
則  $\overline{OE}$  垂直平分  $\overline{AB}$



2.弦心距性質：

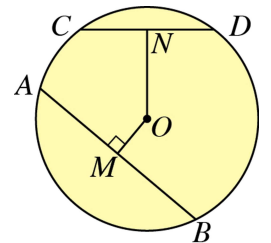
(1)弦心距垂直平分弦

(2)若兩弦不等長，則愈長的弦，其弦心距愈小；愈短的弦，其弦心距愈大

(3)若兩弦等長，則其弦心距相等；若兩弦的弦心距相等，則此兩弦等長。

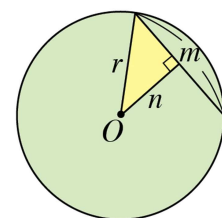
如右圖， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$  分別為弦  $\overline{AB}$ 、弦  $\overline{CD}$  的弦心距

若  $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，則  $\overline{OM} < \overline{ON}$



3.弦心距求法：

若一圓半徑為  $r$ ，其中一弦長為  $m$ ，而其弦心距為  $n$ ，如右圖，  
則在直角三角形中，由畢氏定理可知  $r$ 、 $m$ 、 $n$  三者的關係



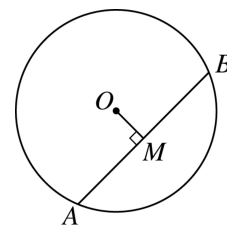
可表示為  $r^2 = n^2 + (\frac{m}{2})^2$



例 7.1：如右圖， $\overline{AB}$  是圓  $O$  上一弦， $\overline{OM}$  為其弦心距。已知  $\overline{OM} = 5$  公分、圓  $O$  的半徑為 13 公分，求：

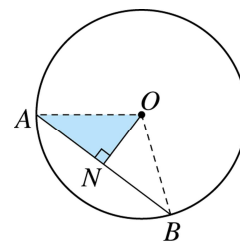
- (1)  $\overline{AM}$  的長                      (2)  $\overline{AB}$  的長

解：



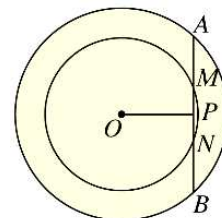
Ex7.1：如右圖， $\overline{AB}$  是圓  $O$  上的一弦， $\overline{ON}$  為其弦心距。已知  $\overline{AB} = 16$  公分、圓  $O$  的半徑為 10 公分，求：

- (1)  $\overline{ON}$  的長                      (2)  $\triangle AON$  的面積

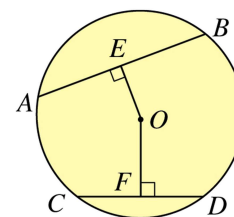


Ex：兩同心圓中，大圓的弦恰為小圓的割線，且與小圓交於  $M, N$  兩點，如右圖，若  $\overline{AB}$  的弦心距  $\overline{OP} = 12$ ，且  $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB} = 10$ ，則：

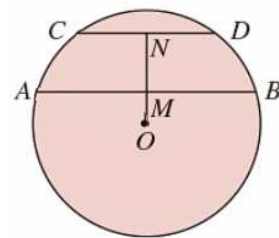
- (1) 小圓的半徑為多少？  
(2) 大圓的半徑為多少？



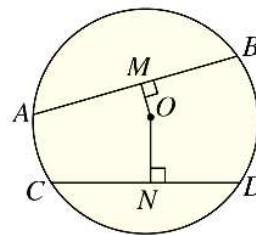
例 7.2：如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  分別為圓  $O$  的兩弦， $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  的弦心距，若  $\overline{CD} = 12$ 、 $\overline{OF} = 8$ 、 $\overline{OE} = 5$ ，則  $\overline{AB}$  的長度為何？



Ex7.2：如右圖， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$  分別為弦  $\overline{AB}$ 、弦  $\overline{CD}$  的弦心距，且  $O$ 、 $M$ 、 $N$  三點共線，  
 已知  $\overline{OM} = 7$ 、 $\overline{AB} = 48$ 、 $\overline{CD} = 30$ ，求  $\overline{MN}$  的長



Ex：如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  為圓  $O$  的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$  分別為弦  $\overline{AB}$ 、弦  $\overline{CD}$  的弦心距。  
 若  $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{OM} = 5$ ， $\overline{ON} = 7$ ，則  $\overline{CD} = ?$

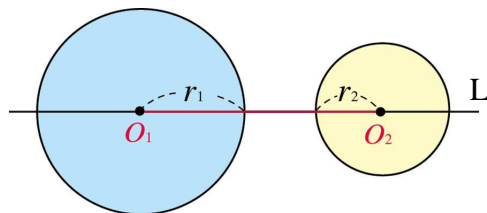


Ex：下列有關弦心距的敘述，哪些是正確的？

- (A) 同一圓中，弦愈長，此弦所對的弦心距也愈長
- (B) 半徑相等的兩圓，若弦心距等長，其所對的弦也等長
- (C) 不等的兩圓中，弦心距愈長，圓愈大
- (D) 同一圓中，弦愈短，此弦所對的弦心距也愈長

**重點 8：兩圓的位置關係**

1. 連心線：連接兩圓圓心的直線稱為連心線，如右圖  
直線 L 為連心線， $\overline{O_1O_2}$  稱為連心線段長

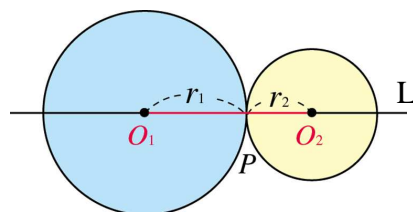


2. 連心線段長與兩圓半徑的關係：

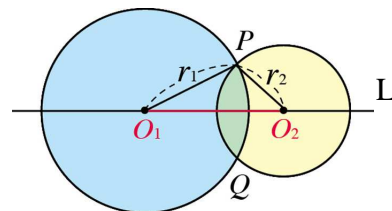
設  $r_1$  是圓  $O_1$  的半徑， $r_2$  是圓  $O_2$  的半徑，且  $r_1 > r_2$ ，則：

(1) 外離：如右圖，圓  $O_1$  與圓  $O_2$  沒有交點，且兩圓都位在彼此的外部，像這樣兩圓的位置關係稱為**外離**，此時連心線段長  $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$

(2) 外切：當兩圓圓心  $O_1$ 、 $O_2$  沿著 L 繼續接近，且形成如右圖的位置關係時，兩圓交於一點 P，且 P 在連心線上，像這樣兩圓的位置關係稱為**外切**，交點 P 稱為切點，此時連心線段長  $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$



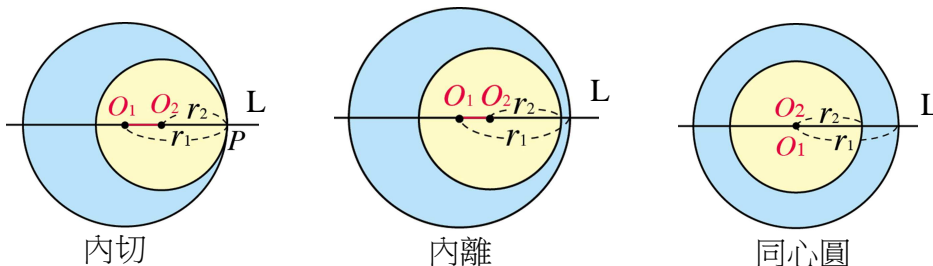
(3) 相交於兩點：當兩圓如右圖時，兩圓會交於兩點，從圖中發現 P、 $O_1$ 、 $O_2$  三點可形成三角形，且  $\overline{PO_1} = r_1$ 、 $\overline{PO_2} = r_2$ ，根據三角形的邊長關係，得到  $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$



(4) 內切：當兩圓形成如下左圖的位置關係時，兩圓交於一點 P，且 P 在連心線上，像這樣兩圓的位置關係稱為**內切**，交點 P 稱為切點，此時連心線段長  $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$

(5) 內離：當兩圓形成如下圖的位置關係時，兩圓不相交，像這樣兩圓的位置關係稱為**內離**，此時連心線段長  $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$

註：當兩圓形成如下右圖的位置關係時，兩圓的圓心在同一點，像這樣的兩圓我們稱為**同心圓**，而同心圓也是內離的一種，連心線段長  $\overline{O_1O_2} = 0$



註：兩等圓仍會有外離、外切及相交於兩點，但內切及內離則會不存在，而改為重疊

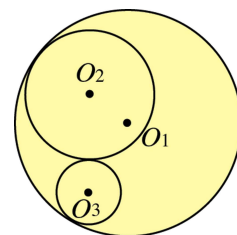
例 8.1：已知圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑分別為 10、5，當連心線段長  $\overline{O_1O_2}$  為下列各長度時，在空格中填入適當的兩圓位置關係的名稱

連心線段長	$\overline{O_1O_2} = 3$	$\overline{O_1O_2} = 5$	$\overline{O_1O_2} = 10$	$\overline{O_1O_2} = 15$	$\overline{O_1O_2} = 20$
兩圓位置關係					

Ex8.1：已知半徑分別為 3、5 的圓  $O_1$  與圓  $O_2$  外切於一點，則此兩圓的連心線段長為多少？

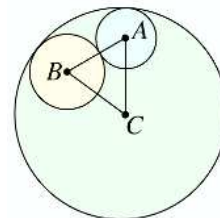
Ex：已知半徑分別為 5、7 的圓  $O_1$  與圓  $O_2$  相交於兩點，則此兩圓的連心線段長  $\overline{O_1O_2}$  的範圍為何？

例 8.2：如右圖，圓  $O_2$  與圓  $O_3$  外切，且兩圓分別與圓  $O_1$  內切，  
 已知圓  $O_1$  的半徑為 13、圓  $O_3$  的半徑為 4、 $\overline{O_1O_2} = 6$ ，求：  
 (1) 圓  $O_2$  的半徑  
 (2)  $\triangle O_1O_2O_3$  的周長



Ex8.2：已知圓  $O_1$  的半徑大於圓  $O_2$  的半徑，且兩圓外切時， $\overline{O_1O_2} = 20$ ，兩圓內切時， $\overline{O_1O_2} = 6$   
 試求圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑分別為多少？

Ex：如右圖，三個圓，A，B，C 皆為圓心，圓 A 與圓 B 外切，  
 同時兩圓和圓 C 內切，已知圓 A 半徑為 5，圓 B 半徑為 6，  
 圓 A 半徑為 15，則  $\triangle ABC$  周長為多少？



**重點 9：公切線**

1. 切線：當直線與圓恰交於一點時，則此直線為圓的切線
2. 公切線：若某直線同時是兩圓的切線，則稱它為兩圓的公切線

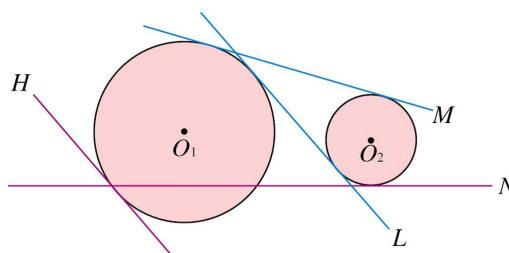
如右圖：

直線 L、M、H 是圓  $O_1$  的切線，

直線 L、M、N 是圓  $O_2$  的切線

⇒ 直線 L、M 是圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的公切線，

但直線 N、H 不是圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的公切線



3. 公切線又可分為外公切線與內公切線：

(1) 外公切線：

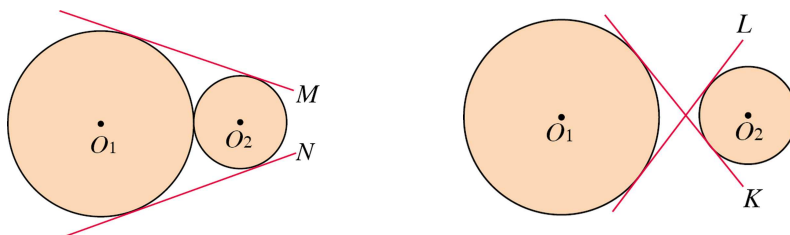
圓  $O_1$  與圓  $O_2$  均在公切線 M 的同一側，M 就稱為圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的外公切線

同理，直線 N 也是圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的外公切線

(2) 內公切線：

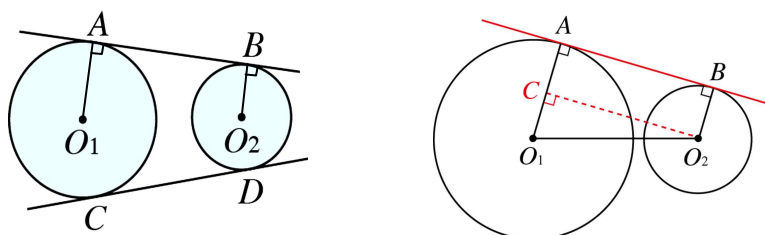
圓  $O_1$  與圓  $O_2$  分別在公切線 L 的兩側，L 就稱為圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的內公切線

同理，直線 K 也是圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的內公切線



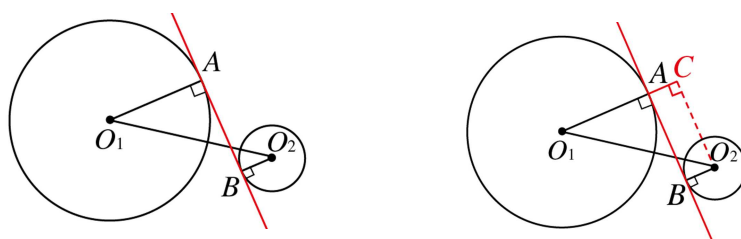
4. 外公切線段長：

如右圖，圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑分別為  $r_1$ ， $r_2$ ，連心線段長為  $\overline{O_1O_2}$ ，且 A、B、C、D 為外公切線切兩圓的切點，則外公切線段長  $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}$

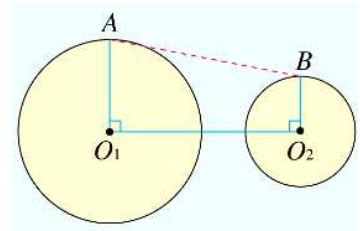


5. 內公切線段長：

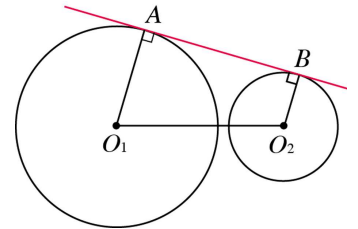
如右圖，圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑分別為  $r_1$ ， $r_2$ ，連心線段長為  $\overline{O_1O_2}$ ，且 A、B 為內公切線切兩圓的切點，則內公切線段長  $\overline{AB} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2}$



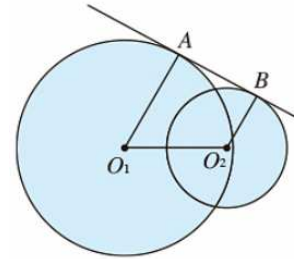
◎ 如右圖，圓  $O_1$  與圓  $O_2$  是兩個大小不同的圓，A 為圓  $O_1$  上一點，B 為圓  $O_2$  上一點，若  $\overline{O_1A} \perp \overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2B} \perp \overline{O_1O_2}$ ，連接  $\overline{AB}$ ，則  $\overline{AB}$  是否為兩圓的公切線？



例 9.1：如右圖，圓  $O_1$  的半徑為 15 公分、圓  $O_2$  的半徑為 8 公分，且  $\overline{O_1O_2} = 25$  公分，A、B 分別為外公切線切兩圓的切點，則  $\overline{AB}$  為多少？

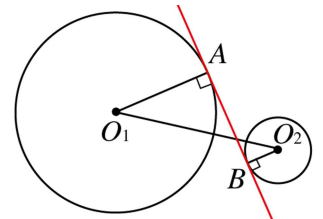


Ex9.1：如右圖，圓  $O_1$  的半徑為 18 公分、圓  $O_2$  的半徑為 10 公分，B 分別 A、為外公切線切兩圓的切點，且  $\overline{AB} = 15$  公分，則  $\overline{O_1O_2}$  為多少？

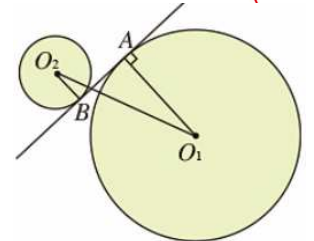


例 9.2：如右圖，若圓  $O_1$  的半徑為 9 公分、圓  $O_2$  的半徑為 3 公分，且  $\overline{O_1O_2} = 15$  公分，A、B 分別為內公切線切兩圓的切點，則  $\overline{AB}$  為多少？

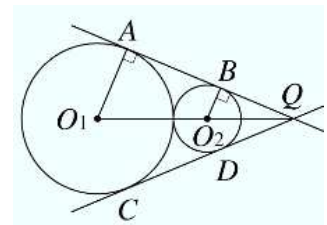
解：



Ex9.2：如右圖，若圓  $O_1$ 、圓  $O_2$  的半徑分別為 9 公分、3 公分，A、B 分別為內公切線切兩圓的切點，且  $\overline{AB} = 5$  公分，則  $\overline{O_1O_2}$  為多少？



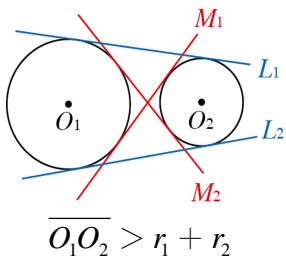
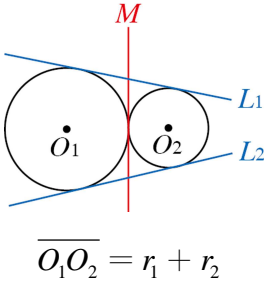
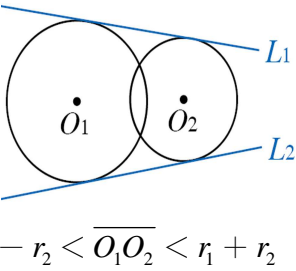
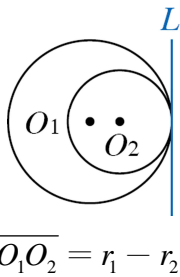
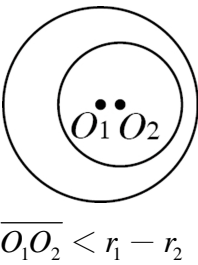
Ex：如右圖，若圓  $O_1$ 、圓  $O_2$  外切，且半徑分別為 9 公分、4 公分，已知兩條外公切線  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  交於 Q 點，A、B、C、D 分別為兩圓的切點，則  $\overline{BQ} = ?$



**重點 10：公切線數**

兩圓的位置與其內、外公切線的數量關係：

(設圓  $O_1$  與圓  $O_2$  的半徑分別為  $r_1, r_2, r_1 > r_2$ ，連心線段長為  $\overline{O_1O_2}$  )

兩圓的位置關係	交點個數	圖 示	外公切線的數目	內公切線的數目	公切線總數目
外離	0	 <p><math>\overline{O_1O_2} &gt; r_1 + r_2</math></p>	2	2	4
外切	1	 <p><math>\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2</math></p>	2	1	3
相交於兩點	2	 <p><math>r_1 - r_2 &lt; \overline{O_1O_2} &lt; r_1 + r_2</math></p>	2	0	2
內切	1	 <p><math>\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2</math></p>	1	0	1
內離	0	 <p><math>\overline{O_1O_2} &lt; r_1 - r_2</math></p>	0	0	0