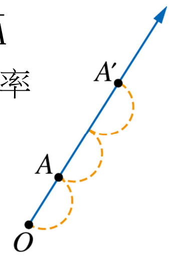
Ch 1.2 縮放與相似

重點 1：線的縮放圖形

1.意義：將一個平面圖形上的所有點經過縮放後，形成的圖形就稱為原來圖形的縮放圖形
圖形經過縮放後，可能大小不一樣，但形狀是維持不變的

2.縮放倍率(點的縮放)：

在平面上固定一點 O，再任意取一點 A，則在 $\overrightarrow{AC}$ 上找到一點 A′，使得 $\overline{OA'}=3\overline{OA}$
即點 A′是以 O 為中心，將 $\overline{OA}$ 縮放 3 倍的對應點，$\overline{OA'}$ ： $\overline{OA}$ 的比值 3 稱為縮放倍率



3.線段的縮放性質：

(1)一線段經過縮放 r 倍後形成的圖形仍然是線段

(2)縮放後的線段與原線段平行(或兩線段在同一直線上)

(3)縮放 r 倍後的線段長度為原來的 r 倍

4.射線的縮放性質：
射線經過縮放 r 倍後形成的圖形仍然是射線，
且縮放後的射線與原射線平行(或兩線段在同一直線上)

5.直線的縮放性質：
直線經過縮放 r 倍後形成的圖形仍然是直線，且縮放後的直線與原直線平行(或兩直線重合)

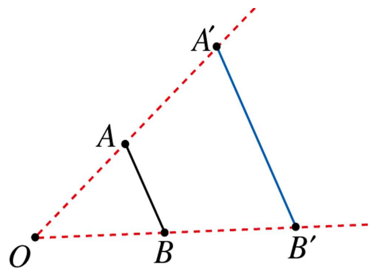
◎線段的縮放：

已知 O、A、B 為平面上三點：

1.已知 A'與 B'是以 O 為中心，分別將 A、B 縮放 2 倍後得到的點，
連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{A'B'}$ ，如右圖

(1) $\overline{A'B'}$ 與 $\overline{AB}$ 平行嗎？

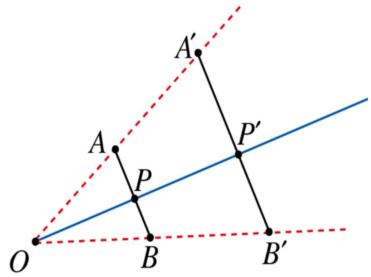
(2) $\overline{A'B'}$ 的長度是 $\overline{AB}$ 的____倍



2.如右圖，在 $\overline{AB}$ 上任意找一點 P，連接 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overline{A'B'}$ 交於 P′點，則：

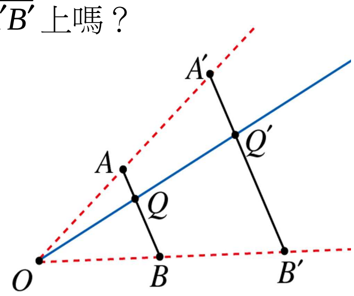
(1) $\overline{OP'}$ 的長度是 $\overline{OP}$ 的____倍

(2)以 O 為中心，將 P 縮放 2 倍的對應點是 P′點嗎？

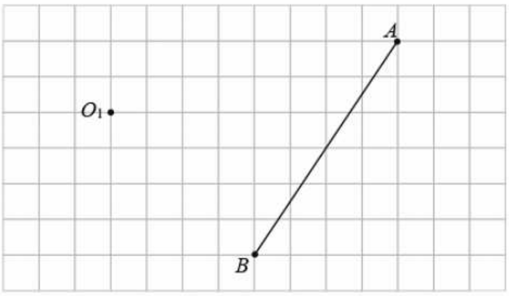


(3)以 O 為中心，將 $\overline{AB}$ 上的任一點縮放 2 倍後，所得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？

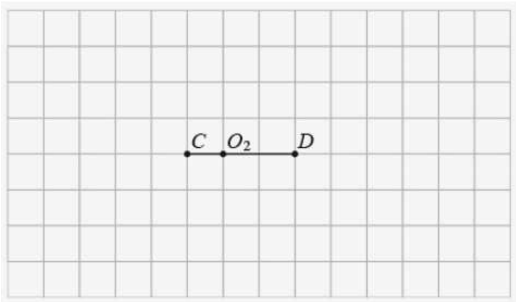
3.如右圖， $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q′，連接 $\overline{OQ'}$ ，與 $\overline{AB}$ 交於 Q 點
那麼以 O 為中心，將 Q 縮放____倍後的點是 Q′



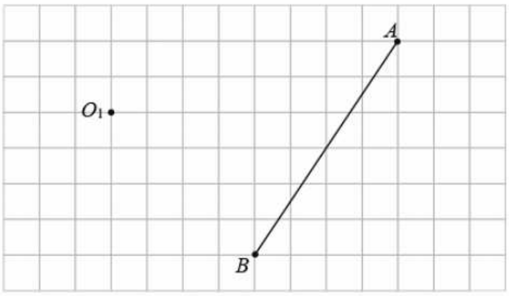
例 1.1：(1)在下圖中，畫出以 O_1 為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形



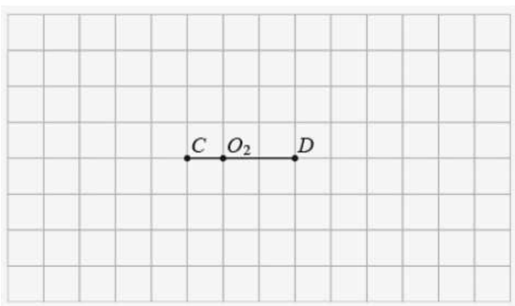
(2)在下圖中，畫出以 O_2 為中心，將 $\overline{CD}$ 縮放 3 倍後的圖形



Ex1.1：(1)在下圖中，畫出以 O_1 為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{3}$ 倍後的圖形



(2)在下圖中，畫出以 O_2 為中心，將 $\overline{CD}$ 縮放 2 倍後的圖形

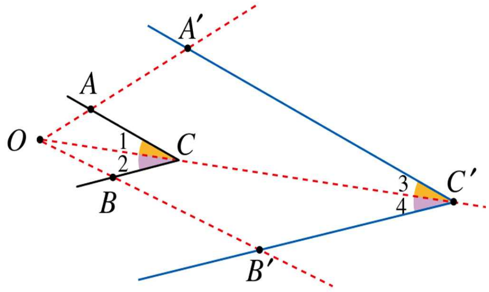


重點 2：角的縮放圖形

角的縮放：一個角度經過縮放之後，角的大小不變

◎角的縮放

如右圖，已知∠ACB 及內部一點 O。以 O 為中心，分別將 A、B、C 三點縮放 3 倍後得到 A′、B′、C′三點，連接$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{C'B'}$，則：



1.∠ACB 與∠A′C′B′的兩邊會互相平行嗎？

2. ∠1 與∠3 度數相同嗎？

3. ∠2 與∠4 度數相同嗎？

4.∠ACB 與∠A′C′B′的度數相同嗎？

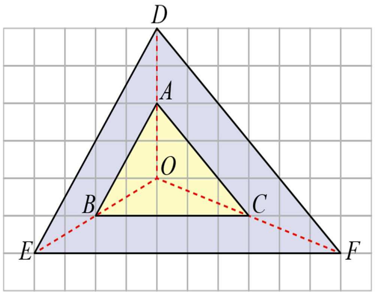
重點 3：三角形的縮放圖形

意義：畫一個多邊形經過縮放後的圖形，只要先將多邊形的各頂點縮放後，再用線段連接，就是縮放後的多邊形圖形

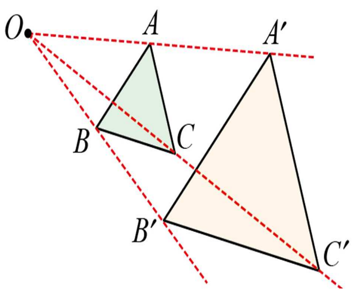
例如：以 O 為中心，要畫出△ABC 縮放 2 倍後的圖形，如右圖

Step1：找到 A，B，C 以 O 為中心縮放 2 倍後的點 D，E，F

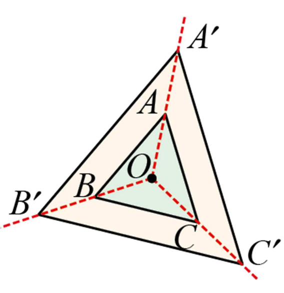
Step2：以線段連接，則△DEF 就是△ABC 縮放 2 倍後的圖形



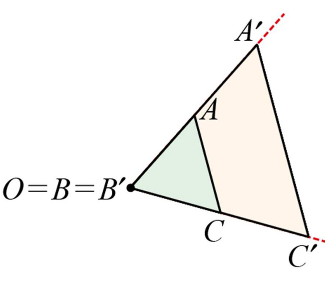
註：不論縮放的中心是在三角形**外部**、**內部**、**頂點**或是**邊上**，縮放後的三角形與原三角形**對應邊成比例**，**對應角相等**，如下圖



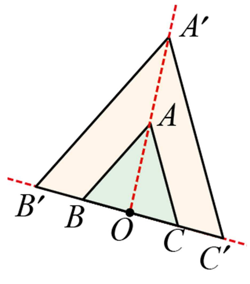
中心是在三角形外部



中心是在三角形內部



中心是在三角形頂點



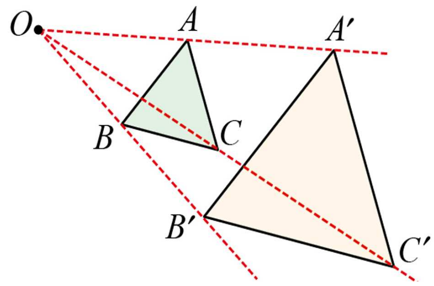
中心是在三角形邊上

例 3.1：如右圖，O 為△ABC 外部一點。

若△A′B′C′是以 O 為中心，將△ABC 縮放 2 倍的縮放圖形。試證明：

(1)△A′B′C′與△ABC 對應邊成比例

(2)△A′B′C′與△ABC 對應角相等

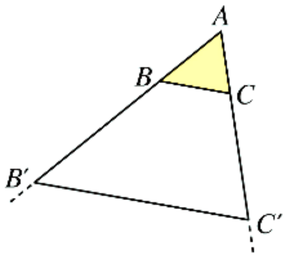


證明：

Ex3.1：如右圖，若△A′B′C′是以 A 為中心，將△ABC 縮放 3 倍的縮放圖形。試證明：

(1)△A′B′C′與△ABC 對應邊成比例

(2)△A′B′C′與△ABC 對應角相等



證明：

重點 4：多邊形的縮放圖形

1.意義：畫一個多邊形經過縮放後的圖形，只要先將多邊形的各頂點縮放後，再用線段連接，就是縮放後的多邊形圖形

2.性質：

(1)不管縮放中心在哪裡，一個圖形縮放成 r 倍後：
對應邊長都是原圖形的 r 倍，且對應角的度數與原圖形相等。

(2)在不同縮放中心下，將一個圖形進行 r 倍縮放：
縮放後的圖形會全等，且縮放後的圖形與原圖形對應邊成比例，對應角相等。

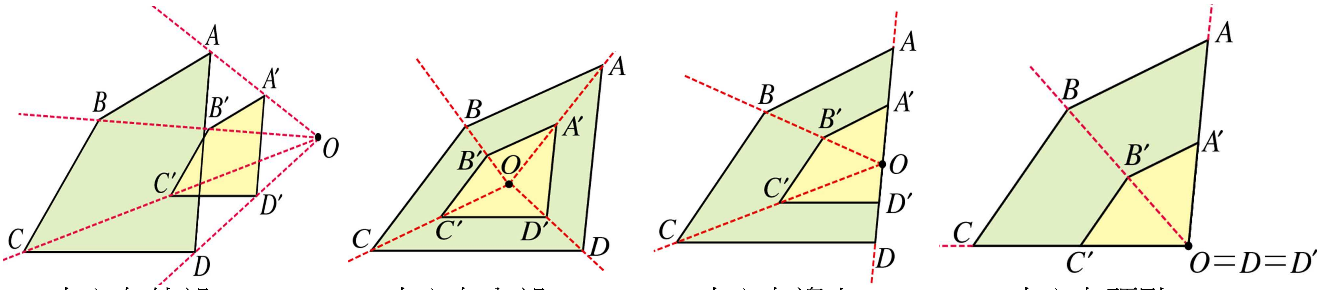
(3)因此在討論圖形縮放時，如果沒有必要，不會特別提及縮放的中心點

即：平面上一個多邊形經過縮放後的縮放圖形，與原圖形「**對應邊成比例**」且「**對應角相等**」

◎以 O 為中心，將四邊形 ABCD 縮放 $\frac{1}{2}$ 後得到四邊形 A′B′C′D′，則：

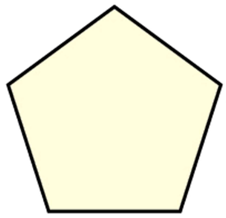
(1)四邊形 ABCD 與四邊形 A′B′C′D′的對應邊成比例，對應角相等

(2)雖然中心不同，縮放後的四邊形 A′B′C′D′是全等的。如下圖



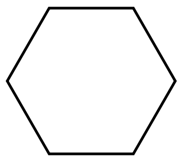
中心在外部　　中心在內部　　中心在邊上　　中心在頂點

例 4.1：右圖是邊長 1 公分的正五邊形，將它縮放 2.5 倍後的縮放圖形，則其邊長與內角分別為多少？



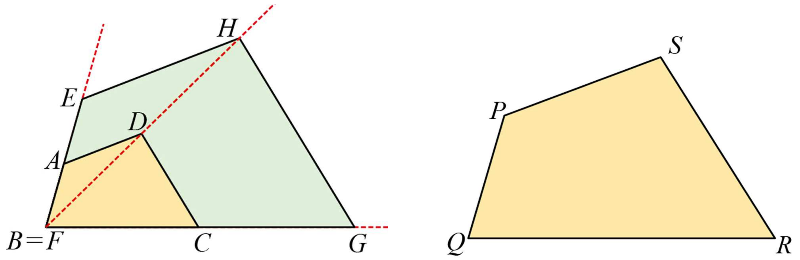
Ex4.1：邊長 2 公分的正十二邊形經過縮放 r 倍後，會變成什麼圖形呢？縮放後的圖形邊長與內角分別為多少？

Ex：如右圖，邊長為 3 公分的正六邊形，將它縮放 3 倍後，所得的縮放圖形邊長與內角分別為多少？



重點 5：相似多邊形

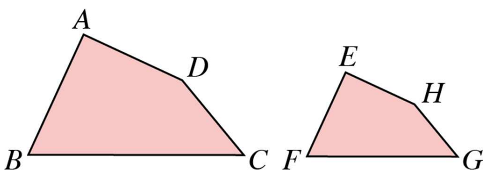
1.意義：如圖，四邊形 ABCD 的一個縮放圖形為 EFGH 與四邊形 PQRS 全等，
則稱四邊形 ABCD 與四邊形 PQRS 相似，記為「四邊形 ABCD～四邊形 PQRS」
讀作「四邊形 ABCD 相似於四邊形 PQRS」



2.性質：(1)兩個圖形中，如果其中一個經過縮放後，會與另一個全等，就稱這兩個圖形相似
(2)若兩個相似的多邊形，則其**對應邊成比例**，**對應角相等**
(3)若兩個邊數相同的多邊形，若其**對應邊成比例**，**對應角相等**，則這兩個多邊形相似
(4)任意兩個正 n 邊形都相似
(5)兩個多邊形，若只有對應邊成比例或對應角相等，則這兩個多邊形不一定相似

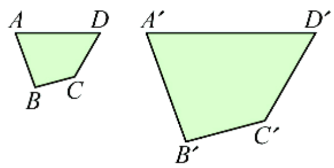
註：若四邊形 ABCD～四邊形 PQRS，則 A，B，C，D 四點的對應點**不一定**為 P，Q，R，S

例 5.1：如右圖，四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，且 A、B、C、D 四點的對應點分別為 E、F、G、H，
若∠A＝90°、∠B＝65°、∠C＝50°，則：
(1)∠F 是多少度？
(2)∠H 是多少度？



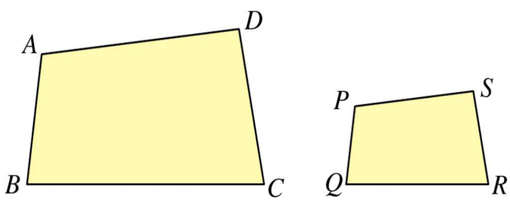
解：

Ex5.1：如右圖，四邊形 ABCD～四邊形 A′B′C′D′，且 A、B、C、D 四點的對應點分別為 A′、B′、C′、D′，若∠A＝70°、∠B＝95°、∠D′＝60°，
則∠A′＝______，∠C＝______



例 5.2：已知四邊形 ABCD～四邊形 PQRS，且 A、B、C、D 四點的對應點依序為 P、Q、R、S，
若 $\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{PQ}$＝3 公分、$\overline{BC}$＝10 公分，則 $\overline{QR}$ 為多少公分？

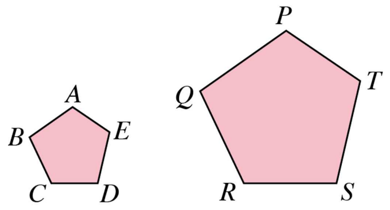
解：



Ex5.2：如右圖，五邊形 ABCDE～五邊形 PQRST，$\overline{DE}$ 的對應邊為 $\overline{ST}$。若 $\overline{AB}=8.5$、$\angle R=100°$，且 $\dfrac{\overline{ST}}{\overline{DE}}=2$，則：

(1) $\overline{AB}$ 的對應邊 $\overline{PQ}$ 的長度為多少？

(2) ∠R 的對應角∠C 是多少度？



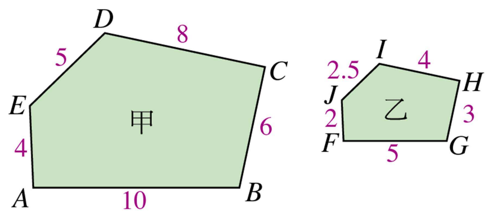
解：

Ex：設五邊形 ABCDE～五邊形 A′B′C′D′E′為兩相似的五邊形，且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DE}:\overline{EA}=1:2:4:3:2$，五邊形 A′B′C′D′E′的周長為 36 公分，試求：

(1) $\overline{CD}$ 的對應邊 $\overline{C'D'}$ 之長為多少？

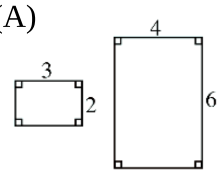
(2) $\overline{AE}$ 的對應邊 $\overline{A'E'}$ 之長為多少？

例 5.3：右圖為兩個五邊形甲與乙，其中∠A＝∠F、∠B＝∠G、∠C＝∠H、∠D＝∠I，且各邊長度如圖所示。這兩個五邊形會相似嗎？

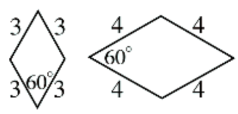


Ex5.3：下列哪一個選項中的兩個圖形<u>不是</u>相似形？

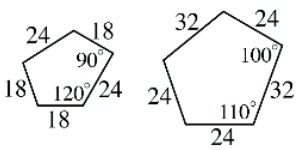
(A)



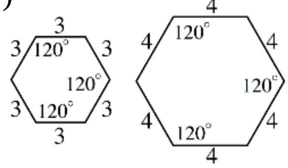
(B)



(C)



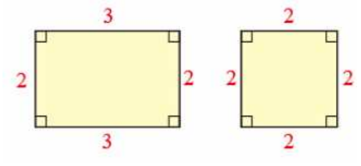
(D)

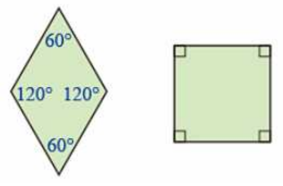


Ex：已知多邊形甲與乙都是正多邊形，且邊數相同，則這兩個多邊形會相似嗎？

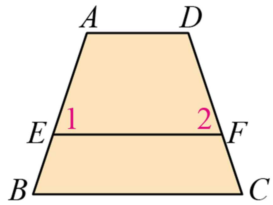
例 5.4：(1)長方形與正方形的四個內角都是直角，它們是否一定相似？
(2)菱形與正方形的四個邊都成比例，它們是否一定相似？

解：(1) (2)

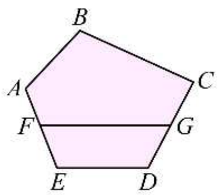




Ex5.4：右圖中，E、F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ ，
則梯形 ABCD 與梯形 AEFD 是否相似？



Ex：如右圖，五邊形 ABCDE 與五邊形 ABCGF 中 $\overline{FG} // \overline{ED}$
則這兩個五邊形是否相似？



Ex：下列敘述何者正確？
(A)兩個長方形一定相似 (B)兩個菱形一定相似
(C)兩個正方形一定相似 (D)兩個平行四邊形一定相似

重點 6：相似三角形判別性質

1.意義：要判別兩個多邊形是否相似時，需同時檢查「對應邊成比例」與「對應角相等」

2.相似三角形判別性質：

(1)SSS 相似性質：

兩個三角形中有三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，稱為 SSS 相似性質

如：在△ABC 和△PQR 中，若 $\overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{AC} : \overline{PR} = \overline{BC} : \overline{QR}$ ，則△ABC～△PQR

(2)SAS 相似性質：

兩個三角形中有一組對應角相等，且夾這個等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似稱為 SAS 相似性質

(3)AAA(或 AA)相似性質：

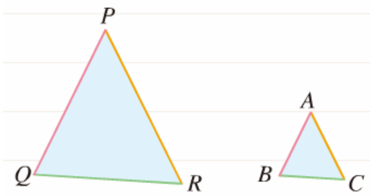
若兩個三角形中有三組(或兩組)對應角相等，則這兩個三角形相似，稱這個性質稱為 AA A(或 AA)相似性質

如：在△ABC 和△PQR 中，若∠A＝∠P，∠B＝∠Q，∠C＝∠R，則△ABC～△PQR

註：如果兩個三角形中，已經有兩組對應角相等，因為三角形內角和為 180°，所以第三組對應角度數也一定相等，那麼這兩個三角形也會相似，這個性質稱為 AA 相似性質

◎SSS 相似性質：

如下圖，在△PQR 和△ABC 中，如果 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{BC}}=r$，那麼△$PQR$ 與△ABC 會相似嗎？



(1) 我們先將△ABC 縮放 r 倍，得到另一個△DEF，其中 A、B、C 的對應點分別為 D、E、F。

(2) 在△DEF 和△PQR 中，

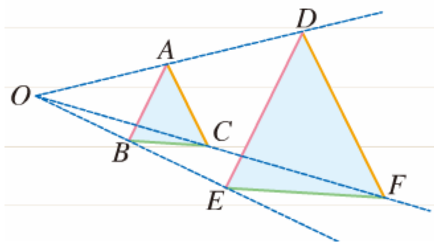
已知△DEF 的各邊長都是△ABC 的 r 倍，

而△PQR 各邊長也都是△ABC 的 r 倍，

因此△DEF≅△PQR (SSS 全等性質)。

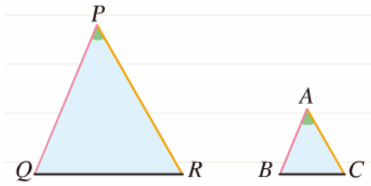
(3) 因為△PQR 會與△ABC 縮放後的圖形全等

所以△PQR～△ABC。



◎SAS 相似性質：

如下圖，在△PQR 和△ABC 中，如果∠P=∠A，$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{AC}}=r$，那麼△$PQR$ 和△ABC 會相似嗎？



(1) 我們先將△ABC 縮放 r 倍，得到另一個△DEF，其中 A、B、C 的對應點分別為 D、E、F。此時△DEF 的邊長都是△ABC 對應邊長的 r 倍。

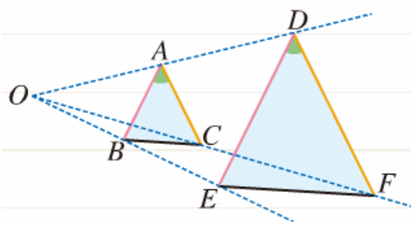
(2) 在△DEF 和△PQR 中，

∵$\overline{DE}$、$\overline{PQ}$ 都是 $\overline{AB}$ 的 r 倍，∴$\overline{DE}=\overline{PQ}$，

同理 $\overline{DF}$、$\overline{PR}$ 都是 $\overline{AC}$ 的 r 倍，∴$\overline{DF}=\overline{PR}$，

又∠D=∠A=∠P，

∴△DEF≅△PQR (SAS 全等性質)。

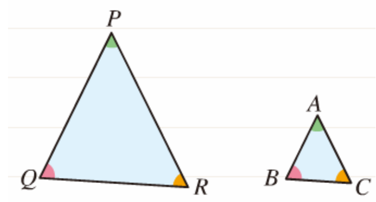


(3) 因為△PQR 會與△ABC 縮放後的圖形全等，

所以△PQR～△ABC。

◎AAA(或 AA)相似性質：

如下圖，在$\triangle PQR$和$\triangle ABC$中，如果$\angle P=\angle A$，$\angle Q=\angle B$，$\angle R=\angle C$，那麼$\triangle PQR$與$\triangle ABC$會相似嗎？

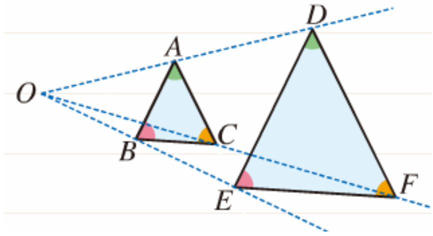


(1) 若$\overline{PQ}:\overline{AB}$的比值為$r$，我們可以先將$\triangle ABC$縮放$r$倍，得到另一個$\triangle DEF$，其中$A$、$B$、$C$的對應點分別為$D$、$E$、$F$。此時$\triangle DEF$的邊長都是$\triangle ABC$對應邊長的$r$倍。

(2) 在$\triangle DEF$和$\triangle PQR$中，$\because \overline{DE}$、$\overline{PQ}$都是$\overline{AB}$的r倍，$\therefore \overline{DE}=\overline{PQ}$，又$\angle D=\angle A=\angle P$，$\angle E=\angle B=\angle Q$，

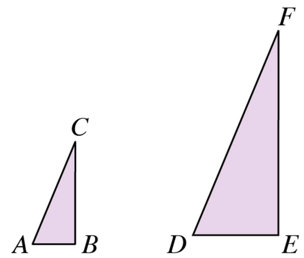
$\therefore \triangle DEF \cong \triangle PQR$ (ASA 全等性質)。

(3) 因為$\triangle PQR$會與$\triangle ABC$縮放後的圖形全等，所以$\triangle PQR \sim \triangle ABC$。



例 6.1：若△ABC 的三邊長分別為$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=12$、$\overline{AC}=13$，且△DEF 的三邊長分別為$\overline{DE}=10$、$\overline{EF}=24$、$\overline{DF}=26$，則這兩個三角形是否相似？

解：

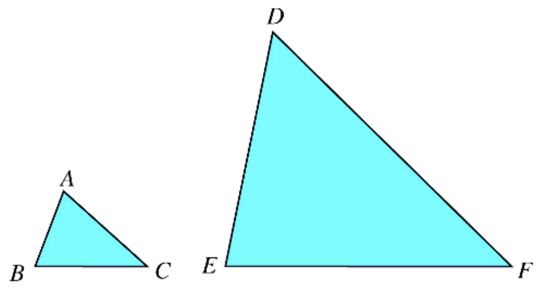


Ex6.1：在△ABC 與△DEF 中，$\overline{AB}=\dfrac{3}{2}\overline{DE}$，$\overline{BC}=\dfrac{3}{2}\overline{EF}$，$\overline{AC}=\dfrac{3}{2}\overline{DF}$，則這兩個三角形是否相似？

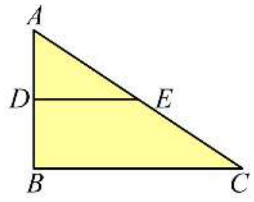
解：

Ex：若△ABC 的三邊長分別為$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AC}=7$，且△DEF 的三邊長分別為$\overline{DE}=15$、$\overline{EF}=18$、$\overline{DF}=21$，則這兩個三角形是否相似？

解：

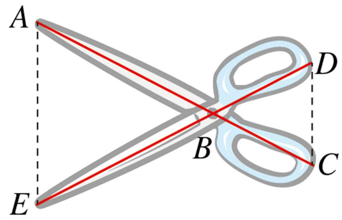


Ex：如右圖，△ABC 中，D，E 兩點分別為 $\overline{AB}$ ，$\overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{DE}$ ＝2，$\overline{BC}$ ＝4，
則△ABC 與△ADE 是否相似？



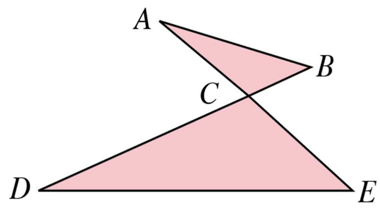
解：

例 6.2：右圖是一把剪刀的平面圖，$\overline{AC}$ 與 $\overline{ED}$ 相交於 B 點，
若 $\overline{AB}$ ＝ $\overline{BE}$ ＝10cm、$\overline{BC}$ ＝ $\overline{BD}$ ＝5cm，
則△ABE 與△CBD 是否相似？



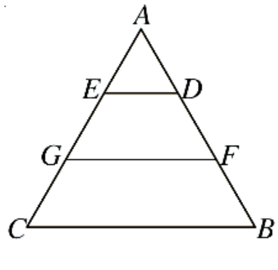
解：

Ex6.2：如右圖，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 C 點，$\overline{AB}$ ＝7、$\overline{BC}$ ＝3、$\overline{AC}$ ＝5、
$\overline{CD}$ ＝10、$\overline{CE}$ ＝6。則：
(1)△ABC 與△DEC 是否相似？
(2) $\overline{DE}$ ＝？

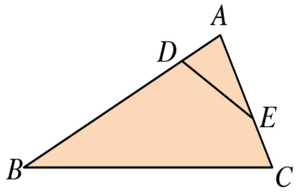


解：

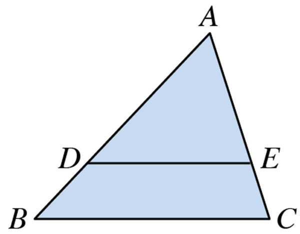
Ex：如右圖，$\overline{AD}$ ＝ $\overline{DF}$ ＝ $\overline{FB}$ ，$\overline{AE}$ ＝ $\overline{EG}$ ＝ $\overline{GC}$ ，且 $\overline{ED}$ ＝5 公分，
則 $\overline{GF}$ ＋ $\overline{BC}$ ＝？



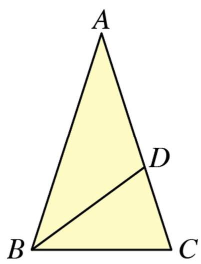
例 6.3：如右圖，△ABC 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
若∠B＝∠AED，則△AED 與△ABC 是否相似？



Ex6.3：如右圖，△ABC 中，D、E 兩點分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的點，
且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ ，則△ADE 與△ABC 會相似嗎？

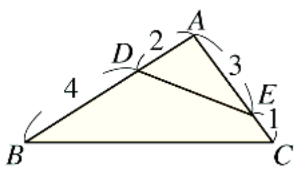


Ex6.31：如右圖，△ABC 中， $\overline{AB}$ ＝ $\overline{AC}$ ，∠A＝36°，D 點在 $\overline{AC}$ 上，
且 $\overline{BD}$ 平分∠ABC，則△ABC 與△BDC 是否相似？



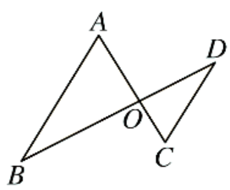
例 6.4：如右圖，△ABC 中，若 $\overline{AD}$ ＝2， $\overline{BD}$ ＝4， $\overline{AE}$ ＝3， $\overline{CE}$ ＝1，
則根據下列何者使得△ABC～△AED？

(A) AAA 相似性質　(B) SAS 相似性質
(C) SSS 相似性質　(D) ASA 相似性質



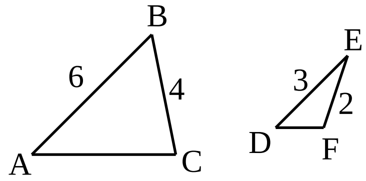
Ex6.4：如右圖，若 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 O，且 $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$
則根據下列何者使得△ABO～△CDO？

(A) AAA 相似性質　(B) SAS 相似性質
(C) SSS 相似性質　(D) ASA 相似性質



例 6.5：(1)在△ABC 與△DEF 中，若∠A＝∠D，$\overline{AB}$ ：$\overline{DE}$ ＝ $\overline{BC}$ ：$\overline{EF}$ ，
則△ABC 與△DEF 是否一定相似？

(2)如右圖，在△ABC 與△DEF 中，若∠A＝∠D，$\overline{AB}$ ：$\overline{DE}$ ＝6：3，
$\overline{BC}$ ：$\overline{EF}$ ＝4：2，則△ABC 與△DEF 是否一定相似？



Ex6.5：如右圖，在△ABC 中，∠B＝90°，$\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ，則：
(1)試判斷△ABC 與△ADE 是否相似？
(2)已知 $\overline{BC}$ ＝6，$\overline{AB}$ ＝8，$\overline{AD}$ ＝5，試求 $\overline{DE}$ ＝？