Ch 3.4 三角形的邊角關係

重點 1：三角形的三邊關係

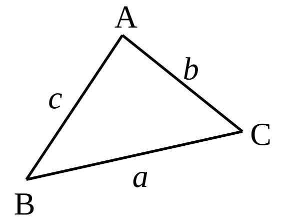
1.三角形的三邊關係：

三角形中任意兩邊的和大於第三邊，任意兩邊差的(絕對值)小於第三邊

如右圖，若 a、b、c 是△ABC 的三邊長，則其三邊關係為：

(1)兩邊的和大於第三邊：$a+b>c$ 或 $b+c>a$ 或 $a+c>b$

(2)兩邊差的(絕對值)小於第三邊：$|b-c|<a$ 或 $|c-a|<b$ 或 $|a-b|<c$



2.三線段構成三角形的條件：

任意三條線段，若「最長的線段小於其他兩線段長的和」，則此三條線段可以構成一個三角形

例 1.0：下表給三線段 a，b，c，其中線段 c 為最長，試以三角形 SSS 尺規作圖方式，回答是否能畫出三角形？

條件	已知三線段	利用 *SSS* 尺規作圖	是否形成三角形
當 $a+b<c$ 時	a　b c	c	
當 $a+b=c$ 時	a　b c	c	
當 $a+b>c$ 時	a　b c	c	

結論：

例 1.1：下列各組的 3 個數分別代表三線段的長度，試問哪幾組數可以構成三角形？

(1) 8，8，12　(2) 7，8，15　(3) 6，6，9　(4) 5，16，9　(5) 7，7，7

Ex1.1：已知有長 3 公分、6 公分的兩線段，則下列甲、乙的敘述是否都正確？

甲：若有長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

乙：若有長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

Ex1.11：下列各組的 3 個數分別代表三線段的長度，則有哪幾組數可以構成三角形？

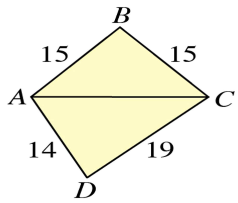
(1) 3，3，7　(2) 1，6，6　(3) 4，4，5　(4) 3，4，4

例 1.2：有一個三角形的頂點分別為甲、乙、丙，三點間的距離記錄如下表，表中部分被水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部分為一整數，則此數可能是哪些整數？

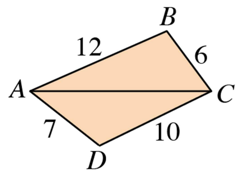
路線	甲到乙	甲到乙	甲到乙
距離 (公尺)	2.5	6.8	

Ex1.2：若ΔABC 中，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=4$，則下列何者可能為 $\overline{AC}$ 之長度？
(1) 4　(2) 6　(3) 10　(4) 14

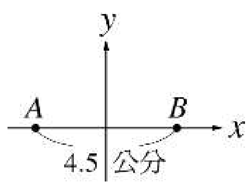
例 1.3：如右圖，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=15$，$\overline{AD}=14$，$\overline{CD}=19$，
則 $\overline{AC}$ 的範圍為何？



Ex1.3：如右圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=10$，$\overline{AD}=7$，
若 $\overline{AC}$ 的長度為一正整數，則其可能的最大值與最小值分別為多少？



Ex1.3：如右圖，坐標平面上，A、B 兩點均在 x 軸上，$\overline{AB}=4.5$ 公分，
且 y 軸為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。若在平面上找一點 C，使得 $\overline{AC}=1.5$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分，則 C 點可能在下列何處？



例 1.4：已知三線段長分別為$(x-2)$、$(x+1)$、$(x+6)$，若此三線段可以構成一個三角形，則 x 的範圍為何？

Ex1.4：已知三線段的長為 a、$(7-a)$、$(8-a)$，若此三線段可以構成一個三角形，則 a 的範圍為何？

重點 2：三角形的邊角關係

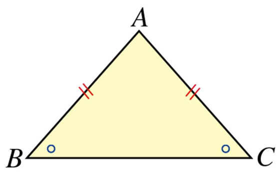
1.等邊對等角，等角對等邊：在一個三角形中，等邊對等角，等角對等邊

(1)等邊對等角：若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則∠B＝∠C，如右圖

即若三角形的兩邊相等，則它們所對的角必相等

(2)等角對等邊：若∠B＝∠C，則 $\overline{AB}=\overline{AC}$，如右圖

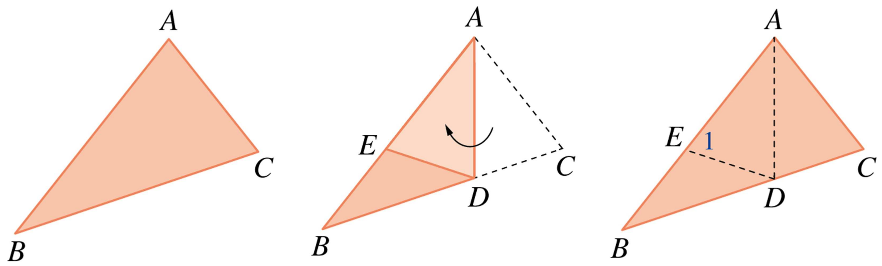
即若三角形的兩角相等，則它們所對的邊必相等



2.大邊對大角，小邊對小角

在一個三角形中，若兩邊不相等，則較大的邊所對的角比較大

如下圖，在ΔABC 中，若 $\overline{AB}>\overline{AC}$，則∠C＞∠B



1.將 $\overline{AC}$ 摺疊到 $\overline{AB}$ 上

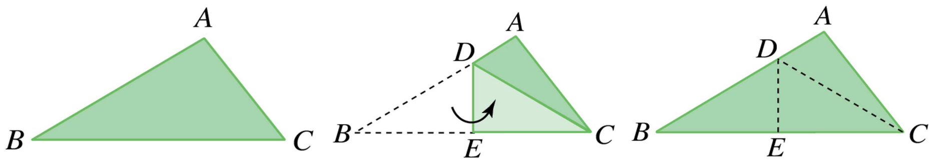
2. ∠1 為外角

∠C＝∠1＞∠B

2.大角對大邊，小角對小邊

在一個三角形中，若兩角不相等，則較大的角所對的邊比較大

如下圖，在ΔABC 中，若∠C＞∠B，則 $\overline{AB}>\overline{AC}$



1.將 B 點摺疊到 C 點上

2. $\overline{BD}=\overline{DC}$

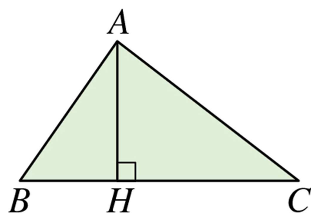
3. $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DC}>\overline{AC}$

例 2.1：如右圖，在ΔABC 中，已知 $\overline{AC}>\overline{AB}$，則：

(1) ∠B 與∠C 的大小關係為________

(2)若 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 且 H 在 $\overline{BC}$ 上，

則∠BAH 與∠CAH 的大小關係為________



Ex2.1：在ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 最短，試判斷ΔABC 之三內角大小：

(1) ∠C _____ ∠A　　(2) ∠B _____ ∠C

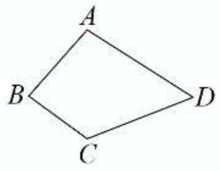
Ex2.11：在ΔABC 中，已知∠1，∠2，∠3 分別為∠A、∠B、∠C 的外角，若 $\overline{BC}>\overline{AC}>\overline{AB}$

則∠1，∠2，∠3 的大小關係為何？

Ex2.12：如右圖，在四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{AD}$ 最長，$\overline{BC}$ 最短，則：

(1)比較∠BAD 與∠BCD 的大小為________

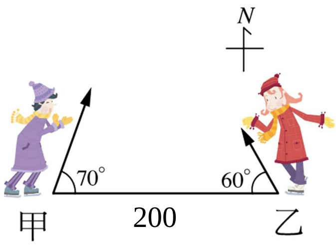
(2)比較∠ABC 與∠ADC 的大小為________



例 2.2：如右圖，甲、乙兩人在同一水平面上溜冰，且乙在甲的正東方 200 公尺處。已知甲、乙分別以東偏北 70°、西偏北 60°的方向直線滑行，而後兩人剛好相遇，然後停止滑行。

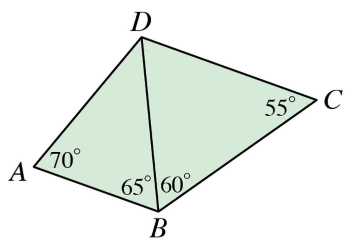
則甲、乙的滑行距離是否都超過 200 公尺？

哪一人滑行的距離比較遠？



Ex2.2：四邊形 ABCD 中，各角的度數如右圖所示，

則 $\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$ 的大小關係為何？



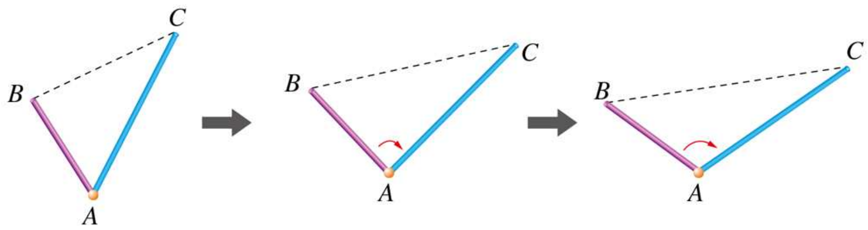
Ex：在ΔABC 中，已知∠A＝70°，∠B＝40°，則下列四個選項中，哪一個是正確的？(90-2 基測)

(A) $\overline{AB}>\overline{BC}$　　(B) $\overline{AB}>\overline{AC}$　　(C) $\overline{AC}=\overline{BC}$　　(D) $\overline{AB}>\overline{AC}$

重點 3：樞紐定理與逆樞紐定理

1.意義：兩個不全等的三角形，若兩組對應邊分別對應相等，比較其夾角大小與對應邊的關係

如下圖，設 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為兩根吸管，A 點固定，則：



(1)當∠A 張開越大時，$\overline{BC}$ 的長度會隨著增加　⇒**樞紐定理**

(2)當 $\overline{BC}$ 的長度增加時，∠A 張開的度數也會隨著增加　⇒**逆樞紐定理**

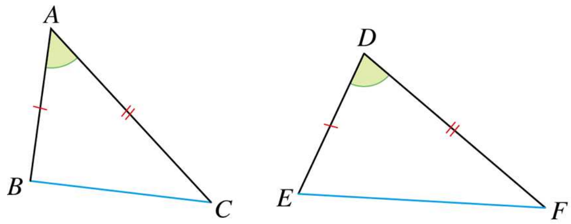
2.定理：在ΔABC 與ΔDEF 中，已知 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ，$\overline{AC}=\overline{DF}$ ，則：

(1)樞紐定理：兩組邊較大的夾角所對的邊較大

如：∠D＞∠A，則 $\overline{EF}>\overline{BC}$

(2)逆樞紐定理：較大的第三邊所對的夾角較大

如：$\overline{EF}>\overline{BC}$ ，則∠D＞∠A



例 3.1：如右圖，ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，則：

(1)若 P 為 $\overline{BC}$ 上的一點，根據下列 P 點的位置，比較∠BAP 與∠CAP 的大小關係

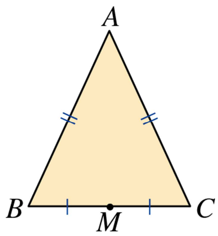
①若 P 和 M 重合，則∠BAP ____ ∠CAP

②若 P 在 B 點與 M 點之間，則∠BAP ____ ∠CAP

(2)若 Q 為 $\overline{BC}$ 上的一點，根據下列條件比較 $\overline{BQ}$ 與 $\overline{CQ}$ 的大小關係

①若∠BAQ＝∠CAQ，則 $\overline{BQ}$ ____ $\overline{CQ}$

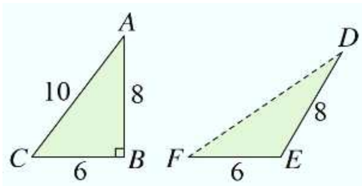
②若∠BAQ＞∠CAQ，則 $\overline{BQ}$ ____ $\overline{CQ}$



Ex3.1：如右圖，已知直角ΔABC 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=10$

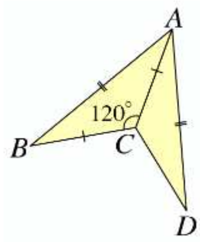
在ΔDEF 中，∠E 為鈍角，且 $\overline{DE}=8$，$\overline{EF}=6$

則 $\overline{DF}$ 的範圍可能為何？



Ex：如右圖，已知 $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\overline{AC}=\overline{BC}$ ，∠ACB＝120°，

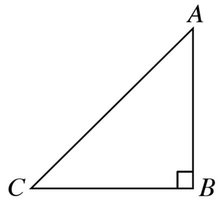
則∠CAD 的範圍可能為何？



重點 4：直角三角形的判別性質

1.畢氏定理：直角三角形的兩股平方和等於斜邊的平方

如右圖，若∠B＝90°，$\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$



2.直角三角形判別性質：

若一個三角形的兩股平方和等於斜邊的平方，則此三角形必為直角三角形

即在ΔABC 中，若 $\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$ ，得∠B＝90°，則ΔABC 為直角三角形

例 4.1：下列各組數是否可以構成直角ΔABC？若可以，寫出直角三角形中哪個角是直角？

(1) $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=25$，$\overline{AC}=24$　　(2) $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=2$，$\overline{AC}=\sqrt{28}$

Ex4.1：已知有長 3 公分，6 公分的兩線段，下列敘述何者錯誤？(94-1 基測)

(A)若另有一長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

(B)若另有一長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

(C)若另有一長為 $3\sqrt{3}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形

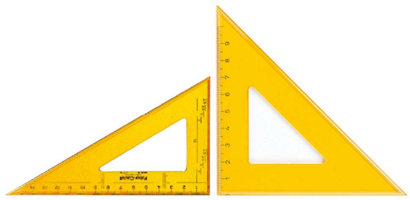
(D)若另有一長為 $3\sqrt{5}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形

重點 5：直角三角形的邊角關係

1.常見的直角三角板種類，如右圖：

(1)三內角為 45°、45°、90°

(2)三內角為 30°、60°、90°



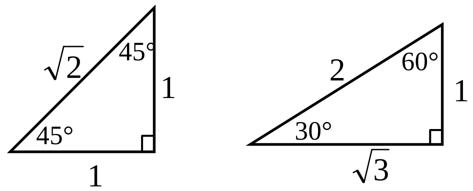
2.直角三角形的邊角關係

(1)直角三角形 45°、45°、90°的三邊角關係：

三內角 45°、45°、90°的對應邊長比為 $1：1：\sqrt{2}$

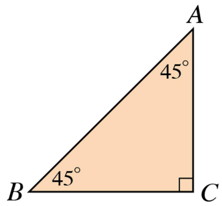
(2)直角三角形 30°、60°、90°的三邊角關係：

三內角 30°、60°、90°的對應邊長比為 $1：\sqrt{3}：2$



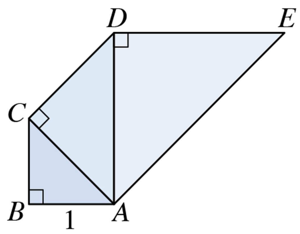
例 5.1：如右圖，直角ΔABC 中，已知∠A＝45°，∠B＝45°，

則 $\overline{AC}：\overline{BC}：\overline{AB}=$？



Ex5.1：如右圖，ΔABC、ΔACD 與ΔADE 均為等腰直角三角形，

若 $\overline{AB}=1$，則 $\overline{AE}=$？

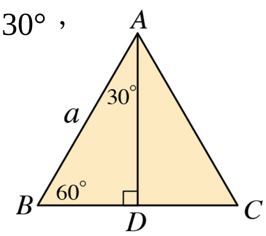


例 5.2：如右圖，ΔABC 是由兩個全等的直角三角形所拼成的，已知∠BAD＝30°，

∠B＝60°，若 $\overline{AB}=a$，則：

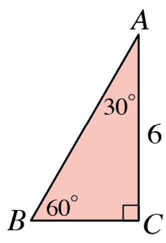
(1) $\overline{BD}=$_____，$\overline{AD}=$_____

(2) $\overline{BD}：\overline{AD}：\overline{AB}=$_______

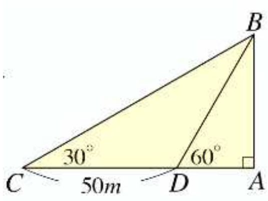


Ex5.2：如右圖，ΔABC 中，∠A＝60°，∠B＝60°，若 $\overline{AC}=6$，則：

(1) $\overline{BC}=$_____ (2) $\overline{AB}=$____



Ex5.21：如右圖，$\overline{AB}\perp\overline{AC}$，A，C，D 在一直線上，∠ACB＝30°，
∠ADB＝60°，$\overline{CD}$＝50 公尺，試求$\overline{AB}$的長

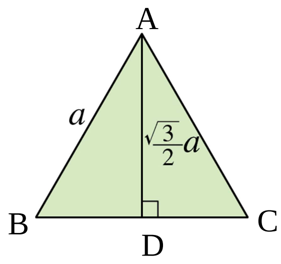


重點 6：正三角形的高與面積公式

如右圖，正ΔABC 的邊長為 a，則：

1.正ΔABC 的高 $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

2.正ΔABC 的面積＝$\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$



例 6.1：已知一正ΔABC 的邊長為 6 公分，試求此正ΔABC 的高與面積分別為多少？

Ex6.1：若有一正三角形的周長為 12 公分，則：
(1)此正三角形任一邊上的高為多少公分？
(2)此正三角形的面積為多少平方公分？