

Ch 2.2 垂直、平分與線對稱圖形

重點 1：垂直

1.垂直：當兩條線段(或直線)相交成直角(90°)時，則稱這兩線段(或直線)互相垂直，交點稱為垂足，以符號「⊥」來表示垂直

2.表示法：

(1)直線  $L_1$  垂直於  $L_2$ ，記作  $L_1 \perp L_2$ ，讀作「 $L_1$  垂直於  $L_2$ 」

(2) $\angle AOB$  為直角，即  $\overline{BO}$  與  $\overline{AO}$  垂直，記作  $\overline{BO} \perp \overline{AO}$

註：若兩直線  $L \perp M$ ，

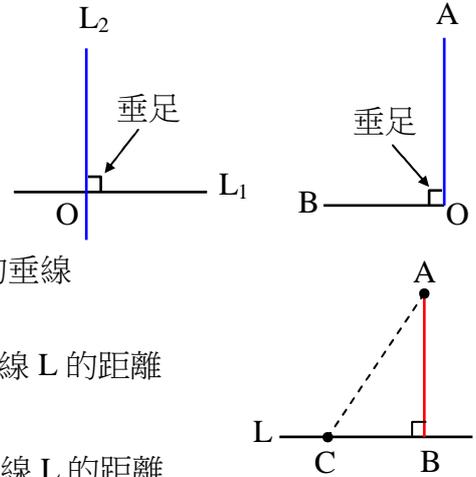
則稱直線  $L$  是直線  $M$  的垂線，反之，直線  $M$  是直線  $L$  的垂線

3.點到直線的距離：

設直線  $L$  外一點  $A$  到直線  $L$  的垂直線段的長，稱為  $A$  點到直線  $L$  的距離

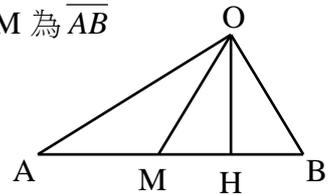
註：在  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\therefore$  斜邊  $\overline{AC} > \overline{AB}$

$\Rightarrow A$  點到  $L$  上任意點，以  $\overline{AB}$  最短， $\therefore$  稱  $\overline{AB}$  為  $A$  點到直線  $L$  的距離



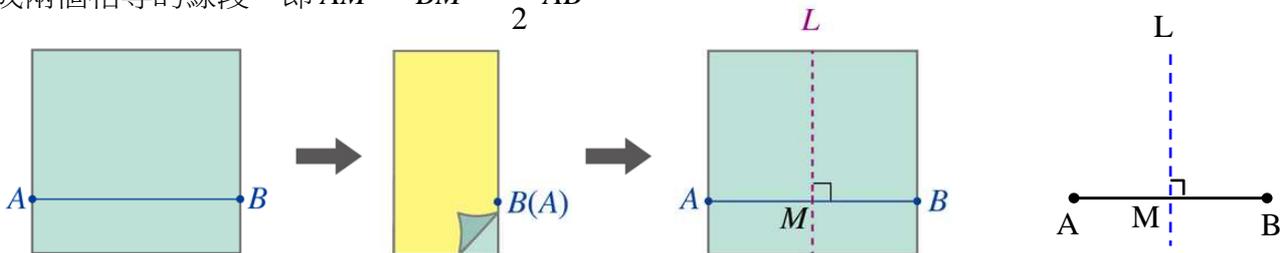
例 1.1：如右圖， $\triangle OAB$  中， $\angle AOB > 90^\circ$ ， $\angle B > \angle A$ 。若  $M$ 、 $H$  在  $\overline{AB}$  上， $M$  為  $\overline{AB}$  的中點， $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ ，則下列哪一線段的長為  $O$  點與  $\overline{AB}$  的距離？

- (A)  $\overline{OA}$       (B)  $\overline{OM}$       (C)  $\overline{OH}$       (D)  $\overline{OB}$       (93 基測一)



重點 2：垂直平分線(或稱中垂線)

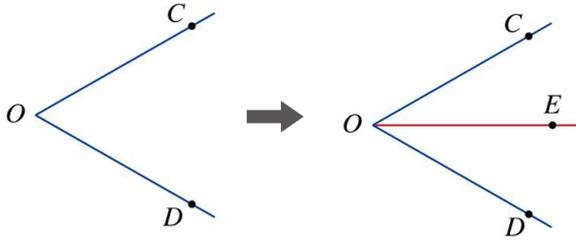
1.意義：如下圖，將  $\overline{AB}$  對摺，使端點  $A$ 、 $B$  重合，此時摺痕  $L$  垂直  $\overline{AB}$  於  $M$ ，且  $M$  點把  $\overline{AB}$  平分，成兩個相等的線段，即  $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$



2.定義：如右上圖， $M$  是  $\overline{AB}$  上一點，且  $\overline{AM} = \overline{BM}$ ，則稱  $M$  點是  $\overline{AB}$  的中點，而過  $M$  點且與  $\overline{AB}$  垂直的直線  $L$ ，就稱為是  $\overline{AB}$  的垂直平分線或中垂線

**重點 3：角平分線(或稱分角線)**

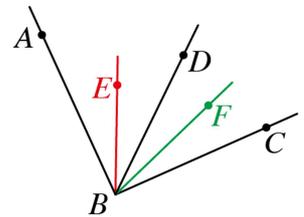
1.意義：如下圖，將 $\angle COD$  對摺，使 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OD}$ 疊合在一起，此時摺痕 $\overrightarrow{OE}$ 把 $\angle COD$  平分成兩個相等的角，即 $\angle COE = \angle DOE = \frac{1}{2} \angle COD$



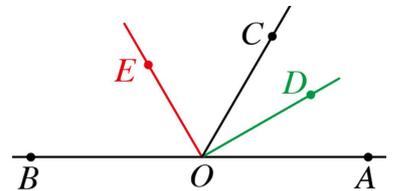
2.定義： $\overrightarrow{OE}$ 把 $\angle COD$  平分成兩個相等的角，即 $\angle COE = \angle DOE = \frac{1}{2} \angle COD$

則稱 $\overrightarrow{OE}$ 為 $\angle COD$  的角平分線或稱分角線，有時也稱 $\overrightarrow{OE}$ 為 $\angle COD$  的角平分線

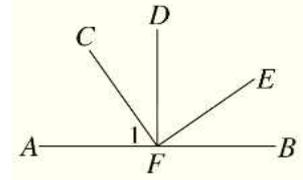
例 3.1：如右圖，已知 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ， $\overrightarrow{BE}$ 平分 $\angle ABD$ ， $\overrightarrow{BF}$ 平分 $\angle CBD$  則 $\angle EBF = ?$



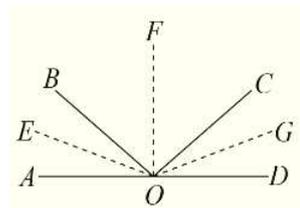
Ex3.1：如右圖，O 為 $\overline{AB}$  上一點，且 $\overrightarrow{OD}$  是 $\angle AOC$  的角平分線， $\overrightarrow{OE}$  是 $\angle BOC$  的角平分線，則 $\angle DOE = ?$



Ex3.11：如右圖，已知 $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{CF} \perp \overline{EF}$ ，若 $\angle 1 = 55^\circ$ ，試說明 $\overline{FE}$  是否為 $\angle BFD$  的角平分線？



Ex3.12：如右圖，已知 $\angle AOD = 180^\circ$ ，且 $\overrightarrow{OE}$ 、 $\overrightarrow{OF}$ 、 $\overrightarrow{OG}$  分別為 $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COD$  之角平分線，若 $\angle EOG = 140^\circ$ ，則 $\angle BOF = ?$



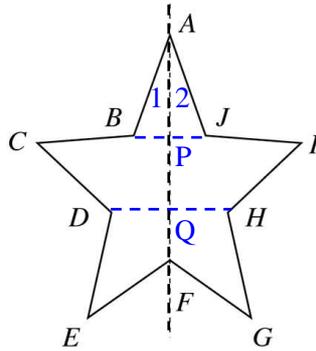
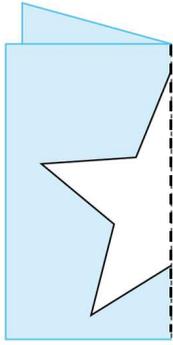
重點 4：線對稱圖形

1.意義：

將一個圖形沿著一條直線對摺，如果直線兩側的部分能完全疊合，這樣的圖形稱為**線對稱圖形**且這條對摺線  $\overleftrightarrow{AF}$  稱為該圖形的**對稱軸**。

在圖形中疊合的點稱為**對稱點**，對應疊合的角稱為**對稱角**，對應疊合的線段稱為**對稱線段**

2.性質：對稱圖形中，對稱角相等、對稱線段相等。



C 點的對稱點為 I 點

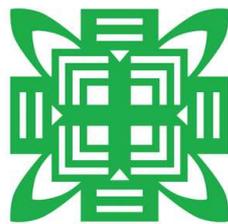
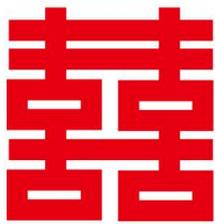
$\angle C$  的對稱角為  $\angle I$ ，即  $\angle C = \angle I$

$\angle 1 = \angle 2$

$\overline{BP} = \overline{PJ}$ ， $\overline{DQ} = \overline{QH}$

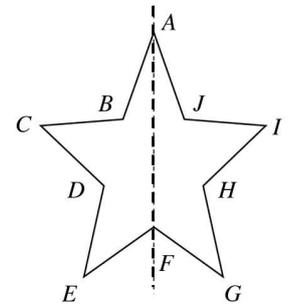
$\overline{AF}$  為  $\overline{BJ}$  與  $\overline{DH}$  的中垂線

註：線對稱圖形



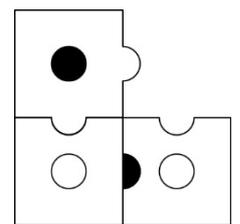
例 4.1：已知右圖是以  $\overleftrightarrow{AF}$  為對稱軸的對稱圖形，則：

- (1) D 點的對稱點是\_\_\_\_\_點
- (2) 若  $\angle E = a^\circ$ ，則  $\angle E$  的對稱角為\_\_\_\_\_，度數為\_\_\_\_\_度
- (3) 若  $\overline{CB} = b$  公分，則  $\overline{CB}$  的對稱線段為\_\_\_\_\_，長度為\_\_\_\_\_公分
- (4)  $\overline{HG}$  的對稱線段為\_\_\_\_\_， $\overline{EF}$  的對稱線段為\_\_\_\_\_

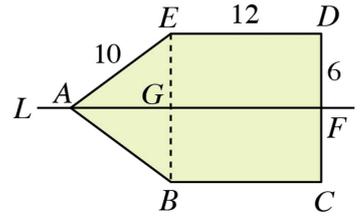


Ex4.1：下列選項中，有一張紙片會與右圖緊密拼湊成正方形紙片，且正方形上的黑色區域會形成一個線對稱圖形，則此紙片為何？(103 會考)

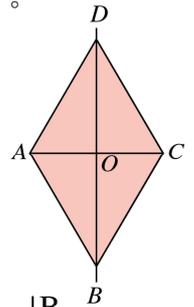
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)



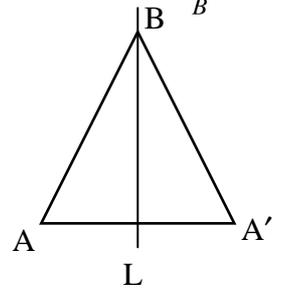
例 4.2：如右圖，五邊形  $ABCDE$  是以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形，其中  $B$ 、 $C$  的對稱點分別為  $E$ 、 $D$ 。已知  $\angle BCF = \angle GBC = 90^\circ$ ， $\overline{AE} = 10\text{cm}$ 、 $\overline{DE} = 12\text{cm}$ 、 $\overline{DF} = 6\text{cm}$ ，試求五邊形  $ABCDE$  的面積為多少？



Ex4.2：如右圖，四邊形  $ABCD$  是以  $\overline{BD}$  為對稱軸的線對稱圖形，其中  $A$ 、 $C$  為對稱點。若  $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$  公分， $\overline{OC} = 3$  公分， $\angle ADB = \angle CBD = 30^\circ$ ，則：  
 (1)  $\overline{BD}$  的長度為多少公分？  
 (2) 四邊形  $ABCD$  的面積為多少平方公分？

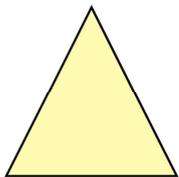


Ex4.21：如右圖，以直線  $L$  為對稱軸，在直線  $L$  右側找出  $A$  點的對稱點  $A'$ ，若  $\angle ABA' = 20^\circ$ ，則  $\angle AA'B = ?$

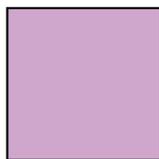


例 4.3：試判斷下列圖形是不是線對稱圖形。如果是，請畫出它所有的對稱軸：

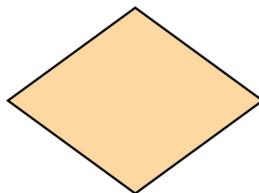
(1) 等腰三角形



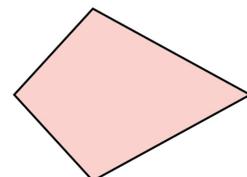
(2) 正方形



(3) 菱形

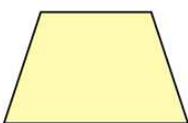


(4) 箏形



Ex4.3：試判斷下列圖形是不是線對稱圖形。如果是，請畫出它所有的對稱軸：

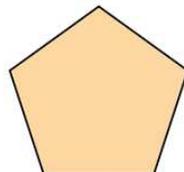
(1) 等腰梯形



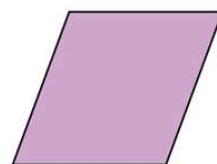
(2) 長方形



(3) 正五邊形

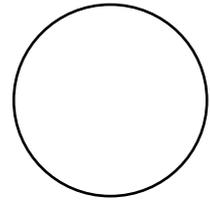


(4) 平行四邊形

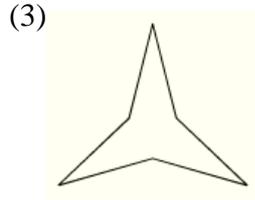
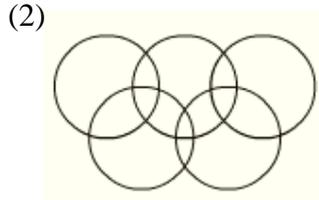
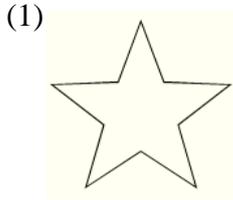


Ex4.31：右圖圓形是不是線對稱圖形？

如果是，試畫其一條對稱軸，又它有幾條對稱軸？



Ex4.32：試判斷下列圖形是不是線對稱圖形。如果是，請畫出它所有的對稱軸：

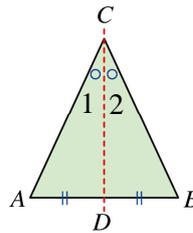


**重點 5：等腰△、正方形、箏形、菱形之線對稱性質**

1. 等腰三角形：

如右圖，等腰△ABC 中， $\overline{CD}$  為對稱軸，則：

- (1)  $\overline{CD}$  垂直平分  $\overline{AB}$ ，即  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{AD} = \overline{BD}$
- (2)  $\overline{CD}$  平分  $\angle ACB$ ，即  $\angle 1 = \angle 2$
- (3) 兩底角相等，即  $\angle A = \angle B$



等腰三角形

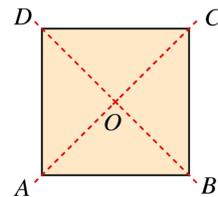
2. 正方形：

如右圖，正方形 ABCD 中，

- $\overline{BD}$  為對稱軸，A、C 為對稱點， $\overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$
- (2)  $\overline{AC}$  為對稱軸，B、D 為對稱點， $\overline{AC}$  垂直平分  $\overline{BD}$

⇒(1) 兩對角線  $\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$  互相垂直平分

(2) 對角線  $\overline{AC}$  與對角線  $\overline{BD}$  是四個內角的角平分線



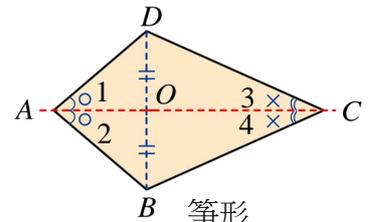
正方形

3. 箏形：

如右圖，箏形 ABCD 中，△BDA、△BDC 皆是等腰三角形，

$\overline{AC}$  為對稱軸，則：

- (1) 對角線  $\overline{AC}$  垂直平分  $\overline{BD}$ ，即  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{OD} = \overline{OB}$
- (2) 對角線  $\overline{AC}$  平分  $\angle BAD$  與  $\angle BCD$ ，即  $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$



箏形

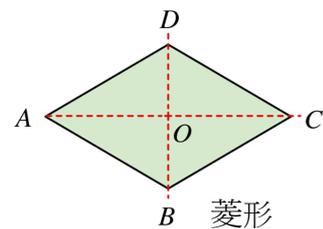
4. 菱形：

如右圖，△BDA、△BDC 都是等腰三角形， $\overline{AC}$  為對稱軸

△ACD、△ACB 都是等腰三角形， $\overline{BD}$  為對稱軸

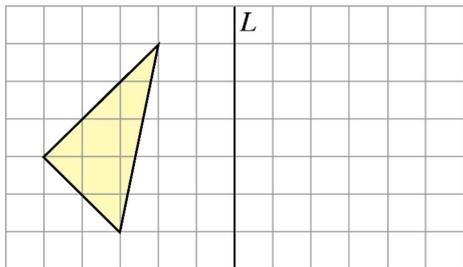
∴(1) 對角線  $\overline{AC}$  與對角線  $\overline{BD}$  互相垂直平分

(2) 對角線  $\overline{AC}$  與對角線  $\overline{BD}$  是四個內角的角平分線



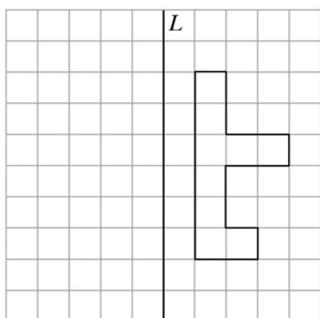
菱形

例 5.1：利用方格，完成以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形：

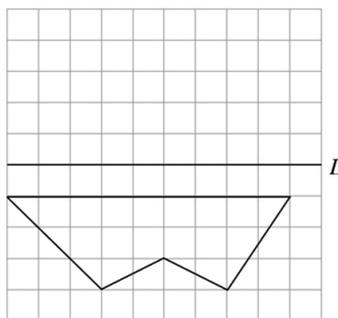


Ex5.1：利用方格，完成以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形：

(1)

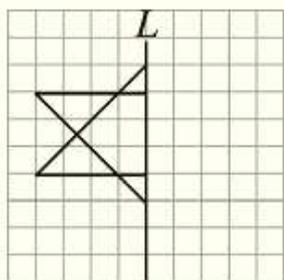


(2)

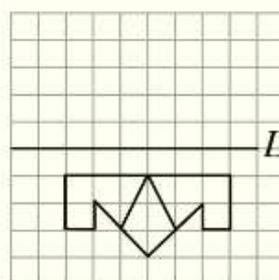


Ex5.11：利用方格，完成以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形：

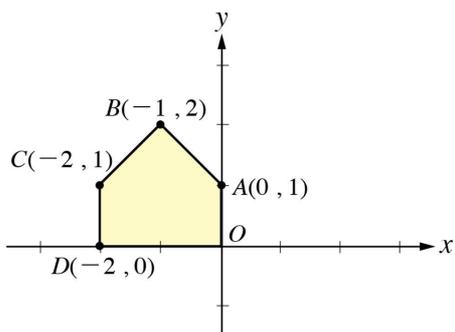
(1)



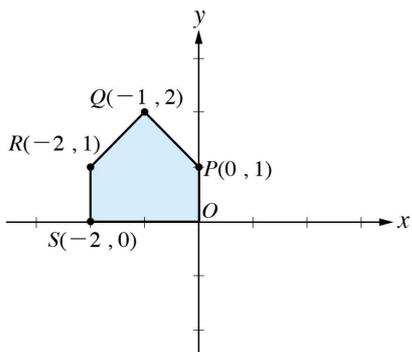
(2)



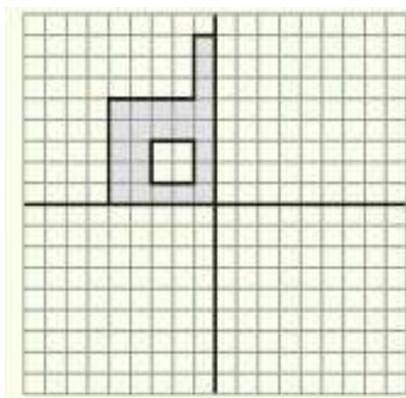
例 5.2：如下圖，以  $y$  軸為對稱軸，畫出五邊形  $OABCD$  的線對稱圖形：



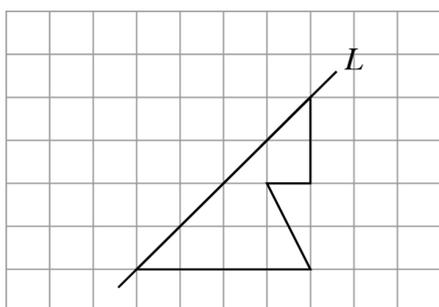
Ex5.2：如下圖，以  $x$  軸為對稱軸，畫出五邊形  $OPQRS$  的線對稱圖形：



Ex5.21：如下圖，分別以直線  $L$ 、 $M$  為對稱軸，完成線對稱圖形後，會形成一個國字，請問此國字為何？

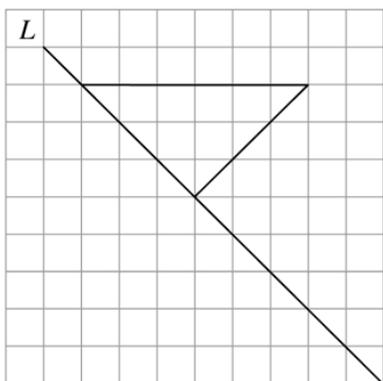


例 5.3：如下圖，利用方格，畫出以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形：

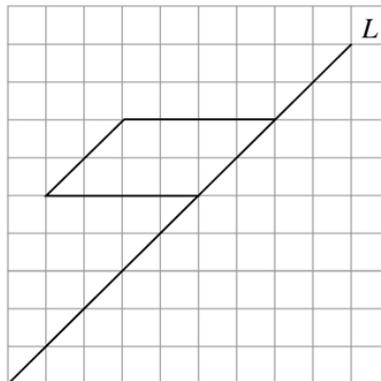


Ex5.3：利用方格，畫出以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形：

(1)

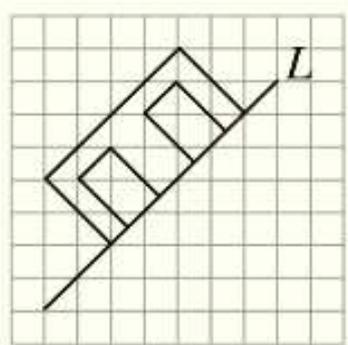


(2)

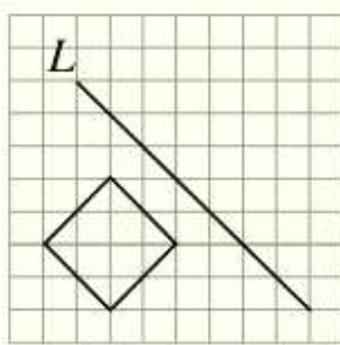


Ex5.31：利用方格，畫出以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形

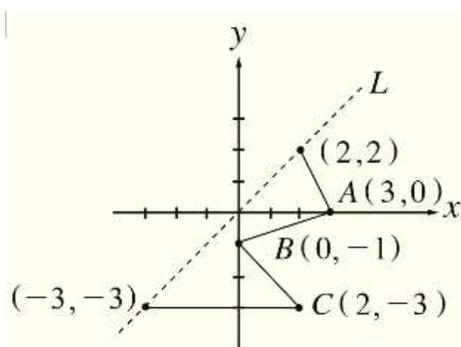
(1)



(2)



Ex5.32：如右圖，坐標平面上有一以直線  $L$  為對稱軸的線對稱圖形，試寫出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點之對稱點的坐標



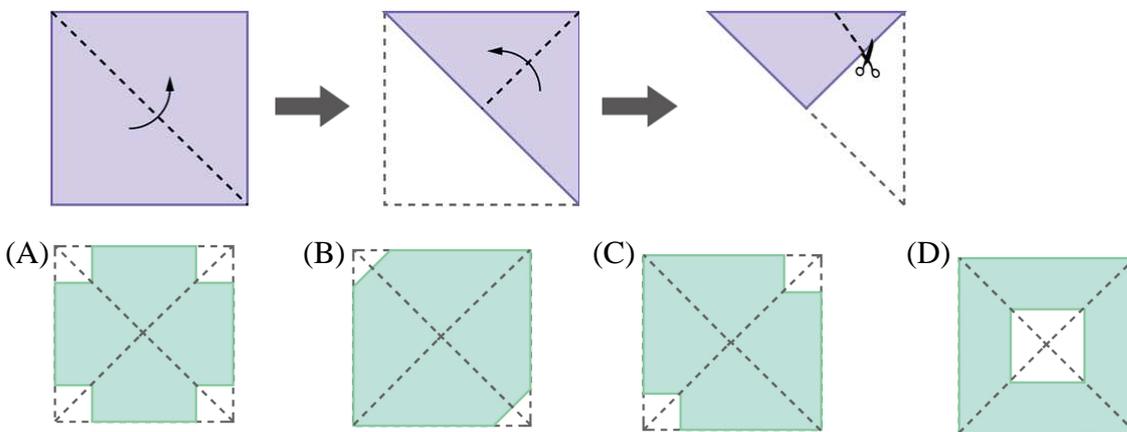
**重點 6：剪出線對稱圖形**

1. 判斷一個圖形是否為線對稱圖形：

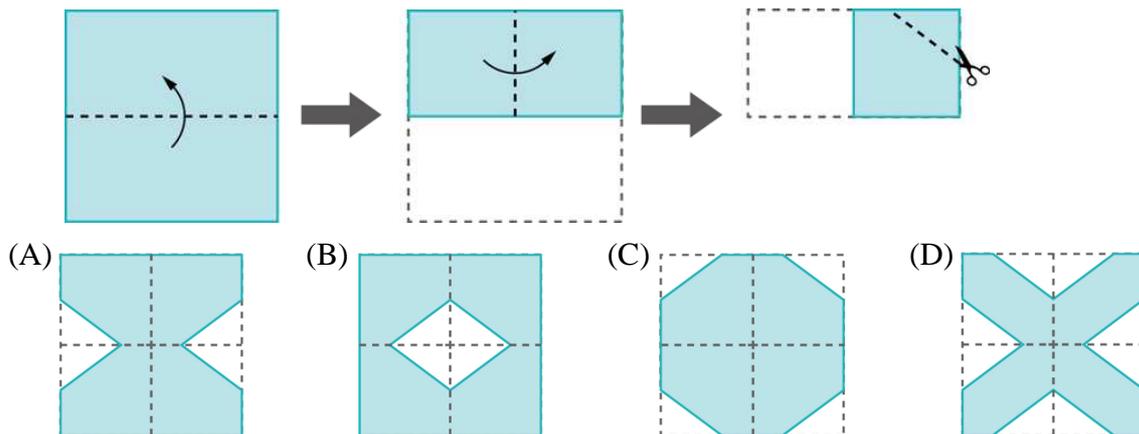
一個圖形沿摺線對摺後，如果摺線兩側的部分完全重疊，則這個圖形就是線對稱圖形，且這條摺線就是對稱軸

2. 剪出線對稱圖形：將利用摺紙來剪出線對稱圖形

例 6.1：依照下圖指示，先將正方形色紙對摺兩次後，在右方剪一刀，剪下三角形後，剩下的紙張展開是下列哪一個圖形？



Ex6.1：依照下圖指示對摺兩次，剪下三角形後，剩下的紙張展開是下列哪一個圖形？

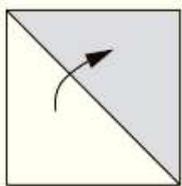


Ex6.11：小妍參觀國小組剪紙大賽的得獎作品展覽，看到了前三名的作品，其比賽規則如下：

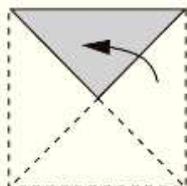
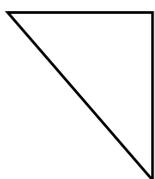
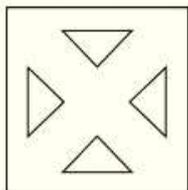
(1)正方形色紙如圖所示對摺三次

(2)剪掉一個等腰直角三角形

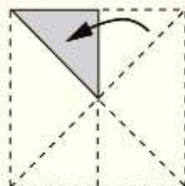
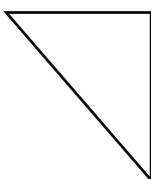
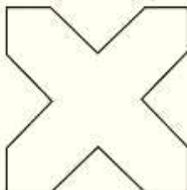
請參考作品，並在下面摺好的色紙上，依次畫出剪掉的等腰直角三角形的形狀與位置



第一名



第二名



第三名

