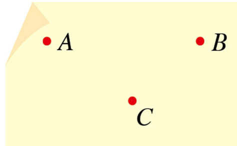
Ch 2.1 生活中的平面圖形

重點 1：點

點：幾何圖形中，「點」是最基本的圖形，點沒有大小之分

為了清楚標示平面上的各點，通常會在點的旁邊寫上**大寫**的英文字母，如：A、B、C、…來表示這些點，如右圖

並稱為 A 點(或點 A)、B 點(或點 B)、C 點(或點 C)



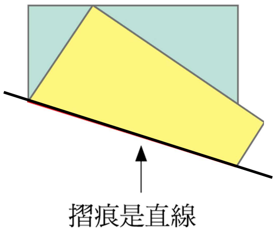
註：西元前三百年左右，歐幾里得(EuClid)編撰了原本(Element)，書中包括了與圖形有關的知識統整。明朝時，徐光啟和義大利傳教士利瑪竇將這本書翻譯成中文，並使用「幾何」一詞，將書名取名為「幾何原本」。從此，跟圖形有關的知識，就稱為「幾何學(Geometry)」

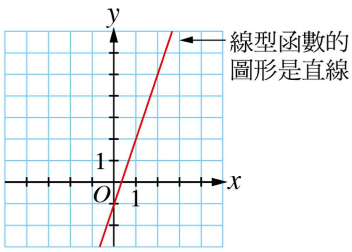
重點 2：線

1.線：平面上，一個點連續移動所經過的路徑就稱為「線」，線沒有粗細之分

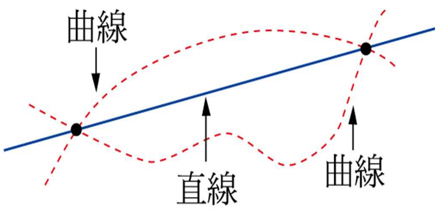
(1)如果路徑是彎曲的，就稱為「曲線」，如：彎曲的道路

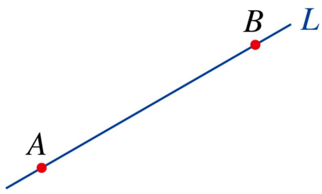
如果路徑(線)是筆直的的，就稱為「直線」，如：摺紙所產生的摺痕





(2)平面上，通過任意兩點可以畫出很多條曲線，但只能畫出一條直線





直線 $AB(\overleftrightarrow{AB})$

2.直線：相異兩點決定一直線

習慣上，用一個英文字母來表示直線，如 L、M、…，有時也會用 L_1、L_2 等符號來代表直線。右上圖中，A、B 是直線 L 上的兩點，也可以把這條直線記為直線 AB 或 $(\overleftrightarrow{AB})$

(也可以寫成直線 BA 或 $\overleftrightarrow{BA}$，符號「↔」是表示直線可以向兩邊無限延伸，所以直線是不分長短的。

3.線段：直線 L 上任意兩點 A、B，在 A 點與 B 點之間的部分(包含 A 點與 B 點)就稱為線段，以線段 AB 或 $\overline{AB}$ 表示(也可以寫成直線 BA 或 $\overline{BA}$ ，而 A 點和 B 點都稱為 $\overline{AB}$ 的端點

註 1：$\overline{AB}$ 除了代表線段 AB 本身之外，也可代表線段 AB 的長度

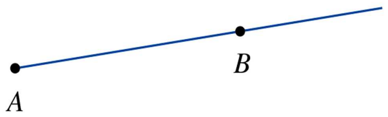
例如線段 AB 的長度是 3 公分，可記作 $\overline{AB}$ ＝3 公分

註 2：任意兩點之間的路線中，以線段的長度為最短

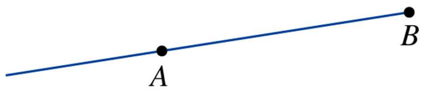
線段 $AB(\overline{AB})$

重點 3：射線

射線：如果有一條線只沿著線段一邊的方向延伸出去，則稱為射線 (有起點，沒有終點)



射線 $AB(\overrightarrow{AB})$



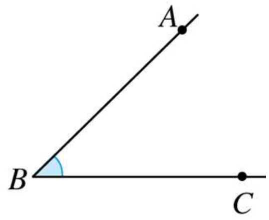
射線 $BA(\overrightarrow{BA})$

從 A 點往 B 點的方向延伸出去的射線以 $\overrightarrow{AB}$表示，上左圖

從 B 點往 A 點的方向延伸出去的射線以 $\overrightarrow{BA}$ 表示，上右圖

顯然$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$是不相同的，如上圖

重點 4：角

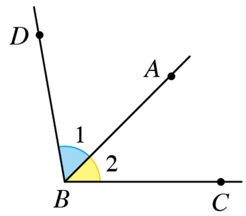


1.角：$\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{BC}$相交於 B 點，形成一個角，如右圖

記作「∠ABC」(讀作角 ABC)或∠CBA，簡記為∠B

B 點稱為∠ABC 的頂點，$\overline{BA}$ 與 $\overline{BC}$ 都稱為這個角的邊

∠B 除了表示角以外，也可以表示它的度數，如∠B＝45°



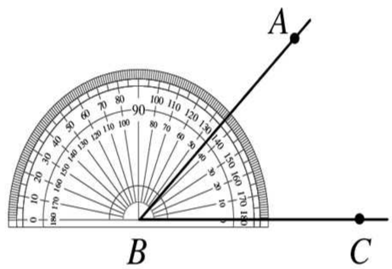
2.角的表示法：

右圖中的∠DBA、∠ABC、∠DBC 都是以 B 點為頂點，

如果只用∠B 來表示，無法確定∠B 代表哪一個角，此時我們可以用代號

∠1 表示∠DBA，用∠2 表示∠ABC，用∠DBC 表示∠1＋∠2

3.角的分類：(可以利用**量角器**度量角度大小)

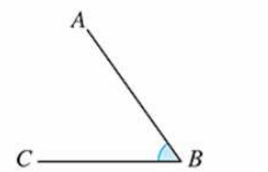
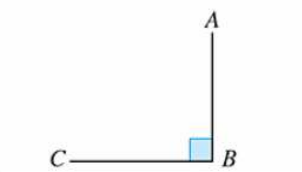
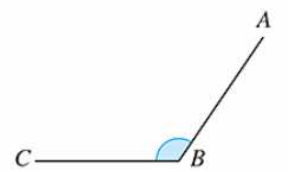


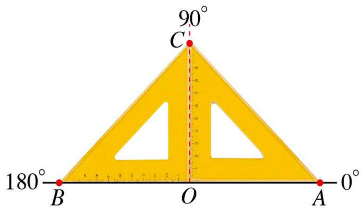
角的大小只和它的角度有關，而與邊的長短無關，根據角的度數，可以分類如下：

(1)銳角：度數大於 0°且小於 90°的角稱為銳角

(2)直角：度數恰為 90°的角稱為直角

(3)鈍角：度數大於 90°且小於 180°的角稱為鈍角

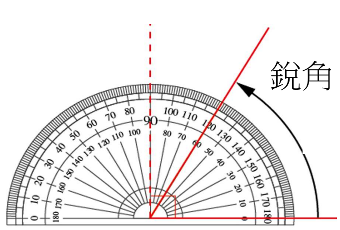
銳角	直角	鈍角
		
$0^\circ<\angle B<90^\circ$	$\angle B=90^\circ$	$90^\circ<\angle B<180^\circ$

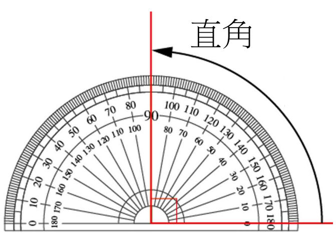


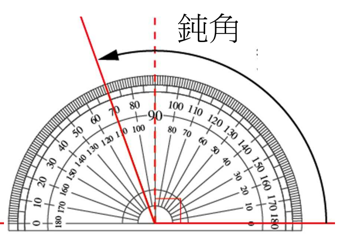
(4)平角：180°的角稱為**平角**，兩個直角可以拼成一個 180°，

此時角的兩邊形成一直線，如右圖

(5)周角：360°的角稱為**周角**，兩個平角可以拼成一個周角 360°







例 4.1：判斷下列各角是銳角、直角或鈍角？

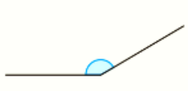
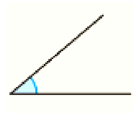
(1) 120°是 ______ (2) 70°是 ______ (3)平角的一半是 ______

Ex4.1：判斷下列各角是銳角、直角或鈍角？

(1) 89°是 ______ (2) 90°是 ______ (3)直角的一半是 ______

Ex4.11：判斷下列各角是銳角、直角或鈍角？

(1) _____ (2) _____ (3) _____

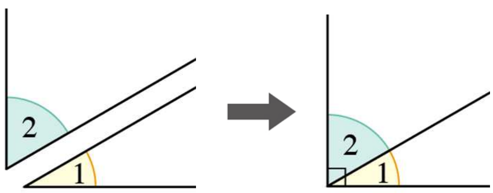
Ex4.12：試求下列各角之度數：

(1)直角的 2 倍＝_____度 (2)平角的$\frac{1}{3}$倍＝_____度 (3)周角的一半＝_____度

重點 5：餘角、補角

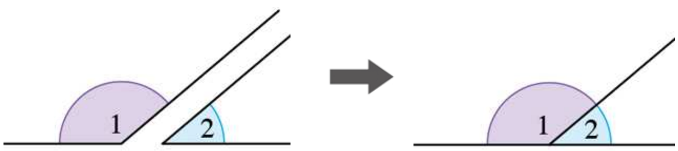
1.餘角：若兩個角的和是 90°，則其中一角是另一角的餘角，或這兩個角互為**餘角**，簡稱**互餘**

也就是當∠1＋∠2＝90°時，就說∠1 是∠2 的餘角，∠2 也是∠1 的餘角



2.補角：若兩個角的和是 180°，則其中一角是另一角的補角，或這兩個角互為**補角**，簡稱**互補**

也就是當∠1＋∠2＝180°時，就說∠1 是∠2 的補角，∠2 也是∠1 的補角



例 5.1：若∠2＝165°，∠1 和∠2 互補，且∠1 和∠3 互補，則∠1 和∠3 的度數為何？

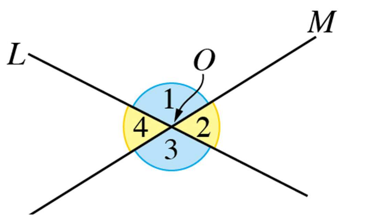
Ex5.1：一個角的餘角的 2 倍和它的補角$\frac{1}{2}$的互為補角，試求這個角的度數

Ex5.11：若∠A 和∠B 互補，∠A 和∠C 互餘，且∠B＋∠C＝140°，則∠A 為多少度？

Ex5.12：設有兩個角∠AOC＝72°，∠COB＝108°，試問 A，O，B 三點會在同一直線上嗎？為甚麼？

重點 6：對頂角

1.對頂角：直線 L 和直線 M 相交於 O 點，以 O 點為頂點的四個角中，
其中不相鄰的兩個角稱為**對頂角**，如右圖
即∠1 的對頂角為∠3，∠2 和∠4 也互為對頂角



2.對頂角性質：

∵∠1＋∠2＝180°，∠2＋∠3＝180°

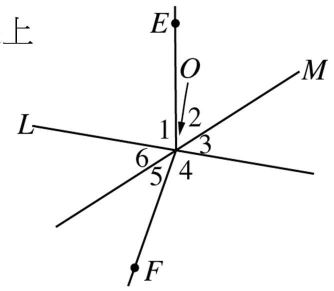
∴∠1＝180°－∠2＝∠3，⇒得知∠1＝∠3，即對頂角相等

例 6.1：如右圖，直線 L 與 M 相交於 O 點，但 E、O、F 三點不在同一直線上
試判斷下列各組是否為對頂角？
是對頂角的，在□裡打✓，不是對頂角的，在□裡打 X

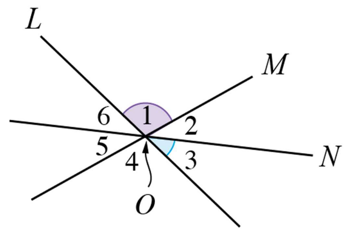
(1) □∠1 與∠4

(2) □∠2 與∠5

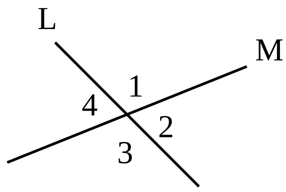
(3) □∠3 與∠6



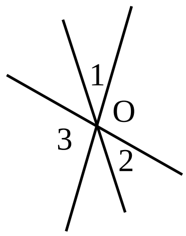
Ex6.1：如右圖，直線 L、M、N 相交於 O 點，若$\angle 1=100^\circ$，$\angle 3=42^\circ$，
則$\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$ 各為多少度？



例 6.2：如右圖，直線 L 與直線 M 相交形成四個角，$\angle 1=3x^\circ$、
$\angle 2=2x^\circ+5^\circ$、$\angle 3=2y^\circ+25^\circ$、$\angle 4=2y^\circ-5^\circ$
試分別求出 x，y 的值，與$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的度數？



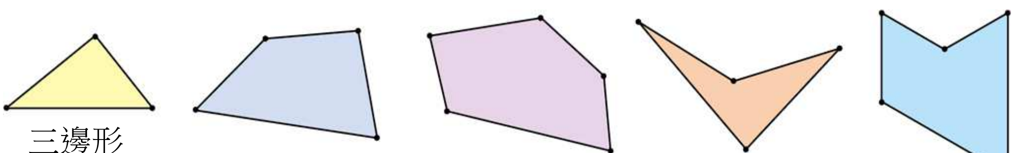
Ex6.2：如右圖，已知三直線交於 O 點，$\angle 1=2x^\circ+10^\circ$、$\angle 2=8x^\circ-30^\circ$、
$\angle 3=6x^\circ+40^\circ$，試求 $x=$？



重點 7：平面幾何圖形

1.平面幾何圖形：如三角形、四邊形、五邊形、圓形、正方形、長方形、菱形、平行四邊形、…，
這些在平面上的幾何圖形，稱為平面幾何圖形

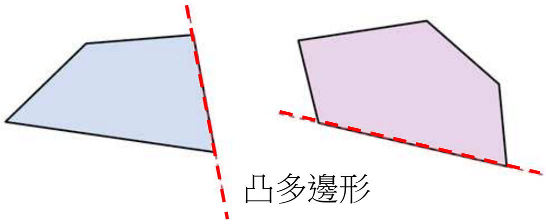
2.多邊形：把平面上的幾個點依序用線段連接起來，像這樣的圖形稱為**多邊形**。
這些點都叫作多邊形的頂點，這些線段都叫作邊，相鄰的兩邊夾成一個內角。
習慣上，會按照多邊形的邊數來命名



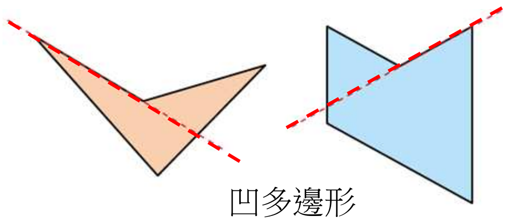
三邊形
(通常稱為三角形)　四邊形　五邊形　四邊形　五邊形

3.凸多邊形：如果將多邊形的任意一邊延長後，其他各邊都在這條延長線的同一側，就稱此多邊形為凸多邊形

凹多邊形：如果一個多邊形不是凸多邊形，就稱為凹多邊形



凸多邊形



凹多邊形

4.多邊形的命名：

(1)按照多邊形的邊數來命名

(2)用多邊形的頂點來稱呼多邊形：

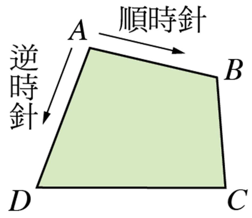
方法：從任意一個頂點開始，沿邊，依順時針或逆時針方向命名

如右圖，以頂點 A 開始，沿邊，順時針，記作四邊形 ABCD

沿邊，逆時針，記作四邊形 ADCB

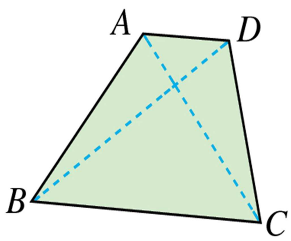
註：以頂點 A 開始，不可記作四邊形 ACBD 或四邊形 ADBC

又以頂點 B 開始，記作四邊形 BCDA 或四邊形 BADC 等



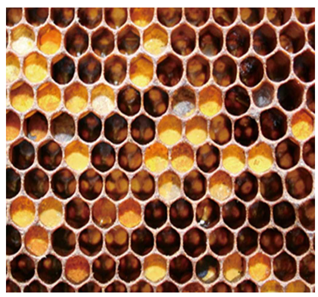
重點 8：對角線、正多邊形

1.對角線：連接多邊形不相鄰兩頂點的線段稱為多邊形的對角線，如右圖中，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 是四邊形 ABCD 的對角線



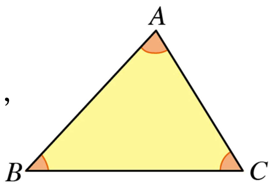
2.正多邊形：多邊形的所有邊都等長，且每個內角都相等的多邊形就稱為正多邊形，例如正三角形、正四邊形(或正方形)

註：民間常用的八卦圖就是一個正八邊形；而蜂巢則近似於正六邊形

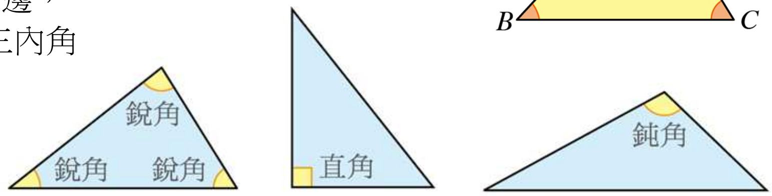


重點 9：三角形

1.三角形：將三個點 A、B、C 以線段連接起來，可形成一個三角形，
稱為三角形 ABC，記為△ABC，其中 A、B、C 為三角形的三頂點，
$\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 稱為三角形的三邊，
∠A、∠B、∠C 稱為三角形的三內角

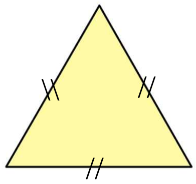


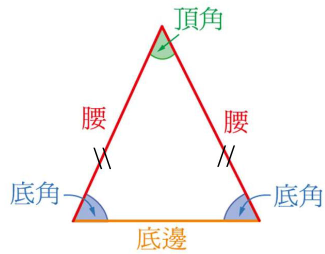
2.三角形依內角分類：
(1)銳角三角形(三個內角都是銳角)
(2)直角三角形(有一個內角是直角)
(3)鈍角三角形(有一個內角是鈍角)



銳角三角形　直角三角形　鈍角三角形

3.三角形依邊長分類：
(1)等邊三角形(或正三角形)：三邊相等的三角形
(2)等腰三角形：有兩邊相等的三角形。
等長的兩邊稱為**腰**，另一邊稱為底邊或**底**
兩腰所夾的角稱為**頂角**，其餘的兩個角都稱為**底角**
註：等邊三角形也是等腰三角形


正三角形



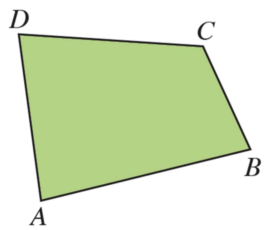
正三角形

例 9.1：三角形的內角中，最多有幾個直角？最多有幾個鈍角？

Ex9.1：在ΔABC 中，已知∠A＋∠B＝125°，∠A＋∠C＝105°，求ΔABC 為何種三角形？

重點 10：四邊形

1.四邊形：四邊形 ABCD 中，
$\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 是這個四邊形的四個邊
∠A、∠B、∠C、∠D 是這個四邊形的四個內角
有共用頂點且彼此相鄰的邊稱為鄰邊，如 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$
沒有共用頂點且彼此相對的邊稱為對邊，如 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$
有共用邊且彼此相鄰的角稱為鄰角，如∠A 和∠D 是鄰角
沒有共用邊且彼此相對的角稱為對角，如∠B 和∠D 是對角



2.生活中常見的四邊形有下列幾種：

(1)正方形：四個角都是直角，且四個邊都等長的四邊形

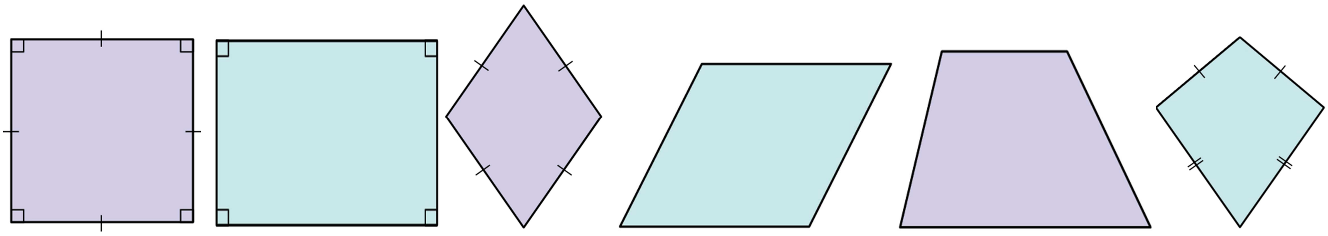
(2)長方形(又稱矩形)：四個角都是直角的四邊形

(3)菱形：四個邊都等長的四邊形

(4)平行四邊形：兩雙對邊互相平行的四邊形

(5)梯形：只有一組對邊平行的四邊形。不平行的邊，稱為腰，
若一個梯形的兩腰相等，則稱為等腰梯形

(6)箏形(又稱鳶形)：兩雙鄰邊分別等長的四邊形

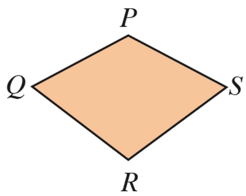


正方形　長方形　菱形　平行四邊形　梯形　鳶形

例 10.1：如右圖，四邊形 PQRS 中，則：

(1) $\overline{QR}$ 的對邊為_______，鄰邊為__________

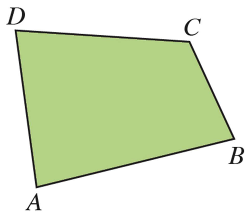
(2)∠P 的對角為_______，鄰角為__________



Ex10.1：如右圖，四邊形 ABCD 中，則：

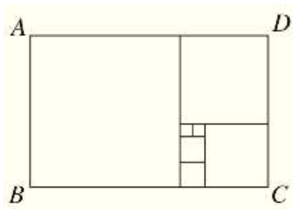
(1) $\overline{AB}$ 的對邊為_______，鄰邊為__________

(2)∠C 的對角為_______，鄰角為__________



Ex10.11：右圖為 7 個正方形紙板緊密地拼成長方形 ABCD 的方式。
求 $\overline{AB}$ ： $\overline{AD}$ ＝？(95 基二)

(A) 12：19　　(B) 21：13　　(C) $\sqrt{2}$ ：1　　(D)($\sqrt{5}$ ＋1)：2



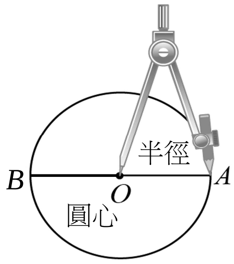
重點 11：圓

1.圓：在平面上，與一個固定點距離相等的所有點組成的圖形稱為**圓**

此固定點稱為圓心，圓心到圓上任一點的連線段成為**半徑**

右圖中，O 為**圓心**，$\overline{OA}$ 為半徑，$\overline{AB}$ 為直徑，且 $\overline{AB}=2\overline{OA}$

註：如果兩圓的半徑相等，則稱為等圓，等圓的直徑相等



2.名詞：

(1)弦：圓上任意兩點所連接的線段稱為弦，以直徑是最長的**弦**

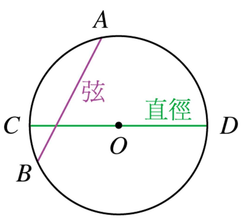
(2)弧：一弦會將圓分成兩個部分，每個部分都稱為**弧**

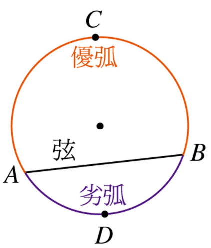
若此弦不是直徑，則將圓分成大小兩個弧，較大的稱為**優弧**，較小的稱為**劣弧**

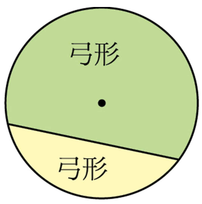
註：AB 將圓分成兩個弧，為了區別這兩個弧，在此二弧上各取一點 C、D，則：

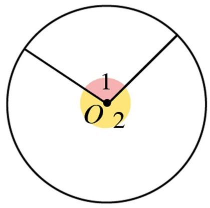
弧 ACB 指的是優弧，記為「$\overset{\frown}{ACB}$」，讀作「弧 ACB」

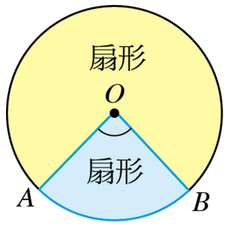
弧 ADB 指的是劣弧，記為「$\overset{\frown}{ADB}$」，讀作「弧 ADB」











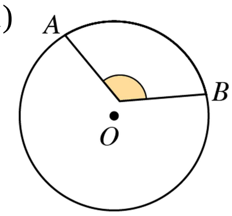
(3)弓形：圓的一弦將圓分為兩個弧，此弦與任一弧所圍成的圖形，稱為弓形

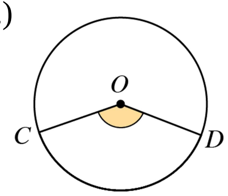
(4)圓心角：以圓心 O 為頂點，兩半徑為邊所組成的角，稱為圓心角，∠1，∠2 都是圓心角

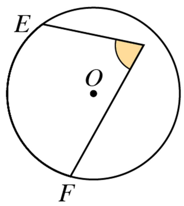
(5)扇形：在圓 O 上，兩半徑與一弧所圍成的圖形，稱為扇形。半徑 $\overline{OA}$ 、$\overline{OB}$ 將圓分成兩個扇形

沒有特別的指定下，扇形 AOB 通常是指圓心角較小的扇形

例 11.1：下列各角何者是圓 O 的圓心角？______

(1)


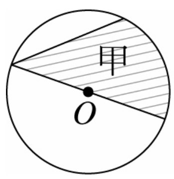
(2)


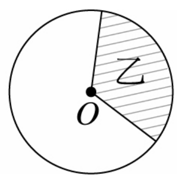
(3)


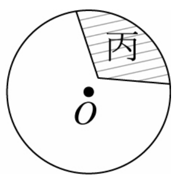
Ex11.1：如右圖，甲是由一條直徑、一條弦及一圓弧所圍成的斜線圖形；乙是由兩條半徑與一圓弧所圍成的斜線圖形；丙是由不過圓心 O 的兩線段與一圓弧所圍成的斜線圖形。下列關於此三圖形的敘述何者正確？(93 基測一)

(A)只有甲是扇形　　(B)只有乙是扇形

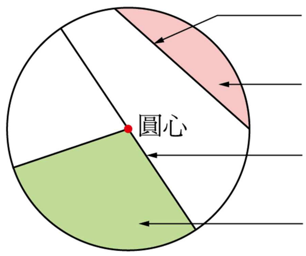
(C)只有丙是扇形　　(D)只有乙、丙是扇形







例 11.2：在下列空格中填入適當名稱：



連接圓上任兩點的線段：__________

圓的一弦和一弧所圍成的圖形：__________

通過圓心的弦：__________

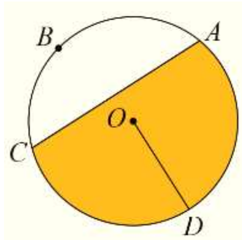
兩半徑和一弧所圍成的圖形：__________

Ex11.2：如右圖，回答下列問題：

(1)半徑為_______

(2)優弧為_______

(3)塗色部份稱為_______



重點 12：弧長與扇形面積

若一半徑為 r 的圓 O，與一弧所對的圓心角為 $x°$，如右圖，則：

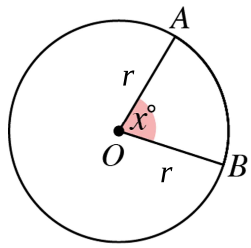
(1)圓周長＝直徑×圓周率＝$2\pi r$，π 為圓周率

(2)圓面積＝半徑×半徑×圓周率＝πr^2

(3)弧長$\overset{\frown}{AB}$＝圓周長×$\dfrac{x}{360}$＝$2\pi r\times\dfrac{x}{360}$

(4)扇形 AOB 面積＝圓面積×$\dfrac{x}{360}$＝$\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$

(5)扇形 AOB 周長＝弧長$\overset{\frown}{AB}$＋兩個半徑長($\overline{OA}+\overline{OB}$)

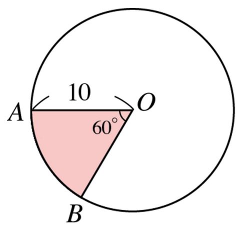


例 12.1：如右圖，圓 O 的半徑為 10 公分，圓心角∠AOB＝60°，試問：

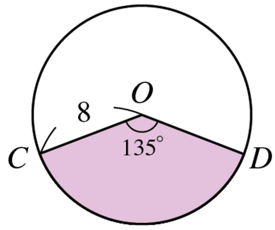
(1)$\overset{\frown}{AB}$的長度為多少公分？

(2)扇形 AOB 的周長為多少公分？

(3)扇形 AOB 的面積為多少平方公分？



Ex12.1：如右圖，圓 O 的半徑為 5 公分，圓心角∠COD＝135°，試問：

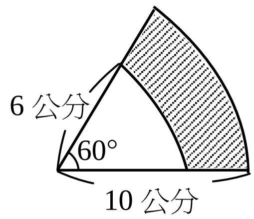


(1)$\overset{\frown}{CD}$的長度為多少公分？
(2)扇形 COD 的周長為多少公分？
(3)扇形 COD 的面積為多少平方公分？

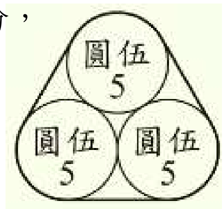
Ex12.11：已知圓 O 的半徑為 4 公分，圓心角∠AOB＝180°，試問：

(1)$\overset{\frown}{AB}$的長度為多少公分？
(2)扇形 AOB 的周長為多少公分？
(3)扇形 AOB 的面積為多少平方公分？

Ex12.12：如右圖，求兩扇形之間所圍成斜線部份的：
(1)周長 (2)面積



Ex：將一條繩子緊緊圈住三個伍圓硬幣，如右圖所示。若伍圓硬幣的半徑試 1 公分，則圈住這三個硬幣的繩子的長度是多少公分？(92 基測一)
(A) 9 (B) 12 (C) π＋6 (D) 2π＋6

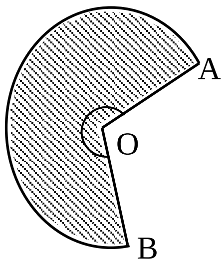


例 12.2：(1)已知一扇形的面積為 48π 平方公分，半徑為 12 公分，求此扇形對應的圓心角？
(2)已知半徑為 15 公分的圓中，有一弧長為 5π 公分，求此弧所對應的圓心角。

Ex12.2：(1)已知一扇形的面積為 2π 平方公分，半徑為 4 公分，求此扇形對應的圓心角？

(2)已知半徑為 8 公分的圓中，有一弧長為 2π 公分，求此弧所對應的圓心角。

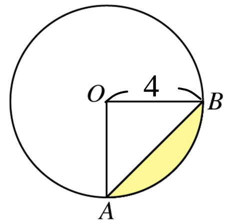
Ex12.21：如右圖，圓 O 半徑為 6 公分，扇形 AOB 面積為 23π 平方公分，求∠AOB＝？



例 12.3：如右圖，圓 O 的半徑為 4 公分，圓心角∠AOB＝90°，試求：

(1)圖中灰色弓形的面積為多少平方公分？

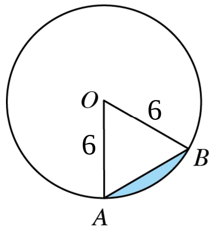
(2)圖中灰色弓形的周長為多少公分？



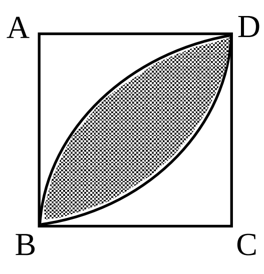
Ex12.3：如右圖，圓 O 的半徑 6，且正三角形 AOB 的面積 $9\sqrt{3}$ ，試求：

(1)圖中灰色弓形的面積為多少平方公分？

(2)圖中灰色弓形的周長為多少公分？

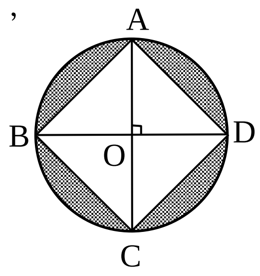


Ex12.31：如右圖，已知四邊形 ABCD 是邊長為 4 的正方形，且灰色區域是分別以 A、C 為圓心，$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為半徑所畫出的弧所圍成的。試求灰色區域的面積？



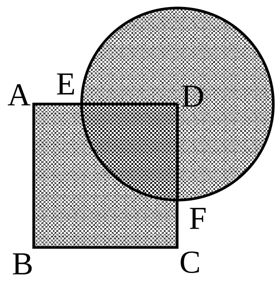
Ex12.32：如右圖，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，圓 O 的直徑為 6 公分，

試求灰色區域的周長為多少公分？



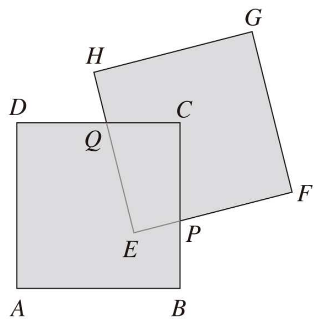
例 12.4：如右圖，四邊形 ABCD 是一個邊長為 30 公分的正方形。

若以 D 為圓心畫一個半徑 20 公分的圓，分別與 $\overline{AD}$ 、$\overline{CD}$ 交於 E、F 兩點，試求灰色區域的面積及周長？



Ex12.4：如圖，將兩個邊長為 12 的正方形 *ABCD*、*EFGH* 的部分區域重疊在一起，形成一多邊形區域(即多邊形 *ABPFGHQD*)。若此多邊形區域的周長為 70，則四邊形 *EPCQ* 的周長為何？

(A) 35　　(B) 26　　(C) 24　　(D) 22　　(96 基測二)



Ex12.41：如右圖，四邊形 ABCD、CEFG 分別為邊長 2 公分、1 公分的正方形。

若以 D 為圓心，$\overline{DF}$ 長為半徑畫弧，會與 $\overline{AD}$ 交於 H 點。

求灰色部分的面積及周長。