

Ch 1.2 等差級數

重點 1：等差級數

1.級數：將一個數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為一個級數

說明：已知一數列 2, 3, 5, 9, 10, 14, 則 $2+3+5+9+10+14$ 稱為級數

註：級數就含有求總和的意思，即「等差級數」表示等差數列求和的意思

2.等差級數：將一個等差數列的各項依次用「+」號連接起來，就稱為一個等差級數

說明：已知一等差數列 5, 8, 11, 14, 17, 20, 則 $5+8+11+14+17+20$ 稱為等差級數

3.數學表示法：

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 為一等差數列，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 稱為等差級數，而 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 的值稱為此等差級數的和，以符號 S_n 表示此數列前 n 項的和，即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

說明： $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots \dots \text{餘類推}$$

4.級數求和公式：

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (\text{設公差為 } d)$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 - 2d) + (a_1 - d) + a_n$$

$$= a_n + (a_1 - d) + (a_1 - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$\text{相加 } 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

$$\text{則 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

例 1：右圖 1 是由一些鋼珠所排出來的圖形，
則鋼珠的總個數是否為 $1+2+3+\dots+10$ ？

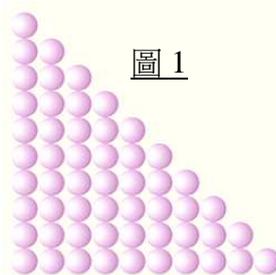


圖 1

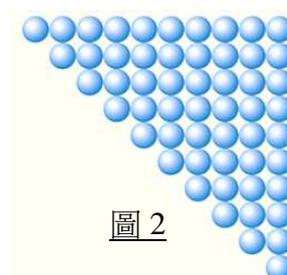


圖 2

Ex1：複製一個相同的圖形並翻轉，如右圖 2，
則鋼珠的總個數是否仍為 $1+2+3+\dots+10$ ？

Ex2：假設 $S=1+2+3+\dots+10$ ，將圖 1、圖 2 合併成右圖 3，
則合併成長方形後的鋼珠總個數是否為 $2S$ ？

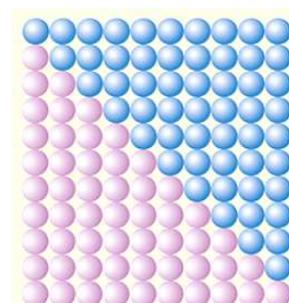


圖 3

Ex3：圖 3 中由鋼珠所排成的長方形共有幾個鋼珠？

Ex4：承 Ex2、Ex3，試求 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10$ ？

例 1.1：相傳數學家高斯(Carl Friedrich Gauss)在 10 歲時，老師在數學課上出了一道難題：

「 $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = ?$ 」給學生計算，老師心想趁學生做題時，可以休息一下，但不到幾秒鐘，高斯就舉手說出答案是 5050，讓老師吃了一驚。你知道高斯是怎麼算出來的嗎？高斯的算法如下：

$$\begin{array}{l}
 \text{假設 } S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100, \text{ 則} \\
 S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 \\
 +) S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1 \\
 \hline
 2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 = 100 \times 101 \\
 \text{所以 } S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050
 \end{array}$$

Ex1.1：請依照高斯計算和的方法，求 1 到 100 中所有偶數的和

Ex1.12：(1)求 1 到 100 中所有整數的和

(2)求 $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19$ 的和

Ex1.13：(1)求 1 到 100 中所有 3 的倍數的和

(2)求 1 到 100 中，是 3 的倍數，但不是 5 的倍數的數字有多少個？又其總和為多少？

例 1.2：已知等差級數 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ 的總和為 100，則：

(1)若將級數各項均加 5，所形成新的等差級數和為多少？

(2)若將級數各項均乘 5，所形成新的等差級數和為多少？

Ex1.2：已知 1~99 中有 49 個偶數，從這 49 個偶數中取出 48 個數字，其平均數為 $49\frac{5}{12}$ ，則未取的數字為何？(A) 20 (B) 28 (C) 72 (D) 78 (98 基測一)

例 1.3：若等差級數共 10 項，其首項為 38，公差為 -3 ，則此等差級數的和為多少？

Ex1.3：若等差級數共 15 項，其首項為 -14 ，公差為 3，則此等差級數的和為多少？

Ex1.31：若等差級數共 25 項，其首項為 80，公差為 -5 ，則此等差級數的和為多少？

例 1.4：求等差級數 $8 + 15 + 22 + 7 + \cdots + 92$ 的和

Ex1.4：求等差級數 $31 + 25 + 19 + \cdots + (-41)$ 的和

Ex：求等差級數 $4 + 7 + 10 + \cdots + 100$ 的和為何？(93 基測二)

(A) 1567 (B) 1664 (C) 1716 (D) 1768

例 1.5：設一等差級數的首項為 5，末項為 34，和為 234，求此等差級數的項數及公差？

Ex1.5：若等差級數的首項為 6，末項為 42，和為 360，求此等差級數的項數及公差？

Ex1.51：若等差級數的首項為 $\frac{1}{2}$ ，末項為 $\frac{23}{4}$ ，和為 25，求此等差級數的項數及公差？

例 1.6：若等差級數 $2+9+16+\cdots$ 前 n 項的和為 335，則 $n=?$ (Hint：項數 n 須為正整數)

Ex1.6：若等差級數 $3+7+15+\cdots$ 前 n 項的和為 171，則 $n=?$

Ex1.61：若等差級數 $3.5+1+(-1.5)+\cdots$ 前 n 項的和為 123，則 $n=?$

Ex1.62：若等差級數共 $2n$ 項，前 n 項和為 10，後 n 和為 75，則公差為何？

重點 2：等差級數的應用問題

意義：利用等差級數的計算公式應用於求數列中第幾項為正數或負數，前 n 項和最大或最小，亦或計算生活中座位或堆疊總數等問題

例 2.1：有一等差級數 $43+39+35+\cdots$ ，求：

(1) 第幾項起開始為負數？

(2) 若前 m 項的和為最大，則 $m=?$

Ex2.1：有一等差級數 $54 + 48 + 42 + \dots$ ，求：

(1) 第幾項起開始為負數？

(2) 若前 n 項的和為最大，則 $n = ?$

Ex2.11：已知等差級數 $98 + 93 + 88 + \dots$ ，求：

(1) 第幾項起開始為負數？

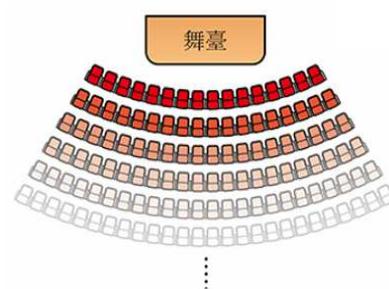
(2) 若前 n 項的和為最大，則 $n = ?$

Ex2.12：已知等差級數 $(-73) + (-69) + (-65) + (-61) \dots$ ，求：

(1) 第幾項起開始為正數？

(2) 若前 n 項的和為最小，則 $n = ?$

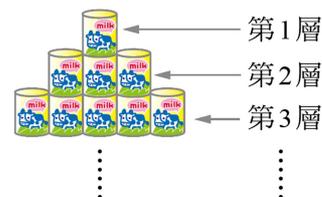
例 2.2：一音樂廳共有 15 排座位，若第一排有 16 個座位，而每一排都比前一排多 2 個座位，則這個音樂廳共有多少個座位？



Ex2.2：一家戲院共有 12 排座位，若最後一排有 42 個座位，而每一排都比後一排少 2 個座位，則這家戲院共有多少個座位？

Ex2.21：一演奏廳共有 15 排座位，每一排都比前一排多 3 個座位。若第六排有 32 個座位，則這個演奏廳共有多少個座位？

例 2.3：大賣場的奶粉罐堆疊如右圖，已知最上層有 1 罐奶粉，第 2 層有 3 罐，……，依次每層比其上一層多 2 罐。若總共有 100 罐，則這些奶粉罐總共疊了幾層？



Ex2.3：阿寶玩疊積木，若下面一層的積木都比上面一層的積木多 3 個，且第一層有 23 個積木，若共疊了 100 個積木，則：

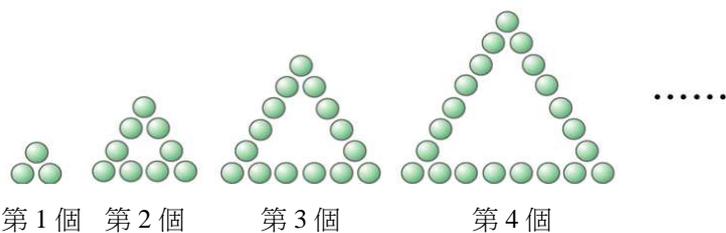
- (1)這些積木共有幾層？
- (2)最上面一層會有幾個積木？

Ex2.31：小雄為了要鍛鍊身體，決定每天做伏地挺身，一開始做 20 下，之後每天加做 5 下，若總共做了 245 下，則小雄共鍛鍊了幾天？

Ex2.32：將獎品 300 份分給得獎學生若干名，已知最後一名得 6 份，每往前一名多得 2 份，則得獎學生共有幾名？第一名學生會得到幾份獎品？

Ex2.33：八年級共有 1127 人參加大會舞，預計圍成圓圈跳舞，第一圈有 5 人，第二圈有 9 人，往外每圈人數依此規則增加，則恰可圍成多少圈？

例 2.4：用棋子排出空心的正三角形，如下圖，觀察圖形的規律並回答問題：



如果要排第 1 個到第 20 個圖形，共需要幾個棋子？

Ex2.4：用棋子排出空心的正方形，如下圖，觀察圖形的規律並回答問題：



如果要排第 1 個到第 10 個圖形，共需要幾個棋子？

Ex2.41：觀察下列圖形的規律並回答問題：

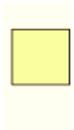


圖 1

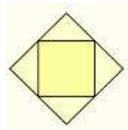


圖 2

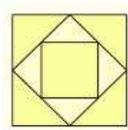
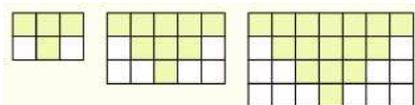


圖 3

(1)圖 3 有多少個等腰直角三角形？

(2)從圖 1 排列到圖 20，則分別有多少個正方形與等腰直角三角形？

Ex2.42：某設計師在長方形空地鋪設綠白色兩種磁磚，設計規則如下圖所示。



已知他在空地上用了 784 塊綠色磁磚，若要將此空地鋪滿，則需要搭配多少塊白色磁磚？