

Ch 1.1 等差數列

重點 1：數列

1.意義：將數字排成一列，不管有規律、或沒有規律的重複出現，都叫做數列。可分成：

(1)有規律的數列，例如：計乘車車資表跳動金額：75，80，85，90，95，...

(2)沒有規律的數列，例如：某期大樂透的中獎號碼為 41，23，06，05，39，31

註：(1)有規律的數列，能找到數列各項之間的規律，求出此數列

(2)沒有規律的數列，無法利用數列各項之間的規律，求出此數列

例如：中央氣象局的天氣預報

2.名詞：

在數列中的每一個數字稱為**項**

第 1 個數稱為第 1 項，或稱為**首項**，一般簡記為 a_1

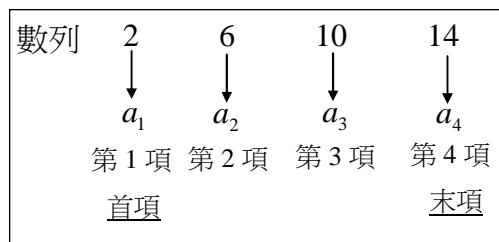
第 2 個數稱為第 2 項，簡記為 a_2 ，

第 3 個數稱為第 3 項，簡記為 a_3 ，

.....

第 n 個數稱為第 n 項，記為 a_n

如果一個數列有 n 項，最後一個數稱為第 n 項或**末項**



※找出數列的規律

例 1.1：觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數：

(1) 1，3，5，7，□

(2) 3，9，27，□，243，729

(3) 1，-2，3，-4，5，□，7，-8，9，-10

Ex1.1：觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數：

(1) 5，10，15，20，□

(2) 1，4，9，□，25，36

(3) 10，8，6，□，2

Ex1.11：觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數：

(1) 2，4，8，10，□

(2) 125，64，27，8，1，0，-1，□，-27

(3) 78，2，76，3，74，□，□

(4) 3，5，9，15，23，33，□，□

(5) 1，-2，4，-8，□，□，64

Ex1.12：觀察下列數列的規律，在空格中填入適當的數：

(1) 1, 3, 6, 10, 15, \square

(2) 2, 6, 12, 20, 30, \square , 56

注意：

觀察數列 1, 2, 4, ... 的規律中，是否能找出 4 的下一項是多少？

以下列出兩種可能的看法：

(1) 若 $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 2 = 4$, 則 $a_4 = a_3 + 3 = 7$

註：此數列為**階差數列**

(2) 若 $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 \times 2 = 2$, $a_3 = a_2 \times 2 = 4$, 則 $a_4 = a_3 \times 2 = 8$

註：此數列為**等比數列**

$$\begin{array}{cccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 & \xrightarrow{\quad} & 7 \\ & & +1 & & +2 & & +3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 & \xrightarrow{\quad} & 8 \\ & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 \end{array}$$

⇒ 所以只憑有限幾項可能會觀察到不同的規律，因而可以有不同的預測

※循環小數的規律

例 1.2：已知 $\frac{27}{13} = 0.\overline{481}$ (循環小數，即從小數點後，數字 4、8、1 重複循環出現)

將小數點後的數字依序排成數列：4, 8, 1, 4, 8, 1, ...，則：

(1) 寫出這個數列的前 15 項

(2) 這個數列的第 49 項、第 59 項及第 69 項分別為多少？

Ex1.2：已知 $\frac{25}{37} = 0.\overline{675}$ (循環小數即從小數點後，數字 6、7、5 重複循環出現)，將小數點後的數字

依序排成數列：6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, ...，則：

(1) 寫出這個數列的前 12 項

(2) 這個數列的第 254 項為何？

※圖形的規律

例 1.3：用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如下圖。如果要排第 10 個圖形，總共需要幾根吸管？(註：遞迴關係)

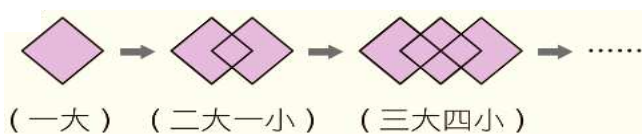


Ex1.3：承例 1.3，是否還有其他的解法？

Ex1.31：用等長的火柴棒依次向右排出相連的正方形，如下圖。如果要排第 5 個圖形，總共需要幾根火柴棒？



Ex1.32：將正方形按下列規則排列，第 1 個圖形內有 1 個正方形，第 2 個圖形內有 3 個正方形，第 3 個圖形內有 7 個正方形，則第 10 個圖形內有多少個正方形？

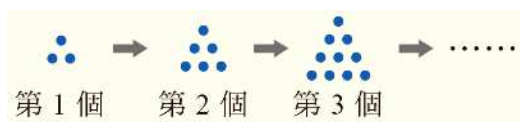


例 1.4：下圖是用黑色棋子排出來的實心正方形，觀察圖形的規律並回答問題：

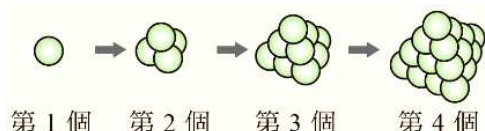


- (1)如果要排出第 5 個圖形，需要幾個黑色棋子？
- (2)如果要排出第 8 個圖形，需要幾個黑色棋子？

Ex1.4：用球依次向右排出實心的正三角形，如下圖。如果要排出第 8 個圖形，需要幾顆球？



Ex1.41：下列是用圓球所堆出的三角形堆。依照圖形的規律，如果要堆出第 7 個圖形，需幾顆圓球？



重點 2：等差數列

1. 意義：在一數列中，任意相鄰的兩項，其後項減去前項的差都相等的數列，就稱為等差數列，而這個差稱為公差，一般以 d 表示公差
2. 關係：後項 - 前項 = 公差；後項 = 前項 + 公差；前項 = 後項 - 公差
即公差 $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$
3. 等差數列的各項、公差 d 不限於整數、也可以是負數、分數、含根號的數或文字符號等

例 2.1：判斷下列何者是等差數列。如果是等差數列，請寫出它的公差：

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| (1) $-10, -6, -2, 2, 6$ | (2) $6, 6, 6, 6, 6$ |
| (3) $1, 4, 9, 16, 25$ | (4) $2, -2, 2, -2, 2$ |

Ex2.1：判斷下列何者是等差數列。如果是等差數列，請寫出它的公差：

- | | |
|------------------------------|---|
| (1) $1, 4, 7, 10, 14$ | (2) $2, 1, 0, -1, -2$ |
| (3) $-1, -1, -1, -1, -1, -1$ | (4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ |

Ex2.11：判斷下列何者是等差數列。如果是等差數列，請寫出它的公差：

(1) $-3, -2, -1, 1, 3$

(2) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$

(3) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$

Ex2.12：判斷下列何者是等差數列。如果是等差數列，請寫出它的公差：

(1) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$

(2) $0, 0, 0, 0, 0$

例 2.2：(1)若等差數列的首項為 2，公差為 3，寫出這個等差數列的前 5 項

(2)若等差數列的首項為 5，公差為 -3 ，寫出這個等差數列的第 6 項

Ex2.2：(1)若等差數列的首項為 -8 ，公差為 4，寫出這個等差數列的前 7 項

(2)若等差數列的首項為 -3 ，公差為 -5 ，寫出這個等差數列的第 8 項

Ex2.21：若等差數列的首項為 4，公差為 $-\frac{21}{2}$ ，寫出這個等差數列的前 5 項

Ex2.22：若等差數列的首項為 a ，公差為 $-3d$ ，寫出這個等差數列的前 5 項

例 2.3：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) _____, 11, 7, _____

(2) $-2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $8\sqrt{3}$, _____, _____

(3) _____, a , $a+5$, $a+10$, _____

(4) _____, _____, a , $a+d$, _____, _____

Ex2.3：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) _____, _____, 1, 5, 9, _____

(2) _____, 11, 5, _____

(3) _____, a , $a+4$, $a+8$, _____

Ex2.31：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) 3, 0, _____, _____

(2) _____, $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, _____, _____

(3) $a+3$, $a+6$, _____, $a+12$, _____

Ex2.32：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) 3.1×10^5 , _____, 3.3×10^5 , 3.4×10^5

(2) $\frac{5}{7}$, $1\frac{3}{7}$, $2\frac{1}{7}$, $2\frac{6}{7}$, _____

重點 3：等差數列的第 n 項

1. 公式定義：若等差數列首項為 a_1 ，公差為 d ，則第 n 項 $a_n = a_1 + (n-1)d$

2. 等差數列中，公差為 d ，則第 n 項 $a_n = a_k + (n-k)d$

例 3.1：已知一等差數列的首項為 24，公差為 -4 ，求此等差數列的第 12 項

Ex3.1：若等差數列的首項為 7，公差為 6，求此等差數列的第 23 項

Ex3.11：若等差數列的首項為 -5 ，公差為 $-\frac{3}{4}$ ，求此等差數列的第 21 項

Ex3.12：若等差數列的首項為 a_1 ，公差為 $7d$ ，求此等差數列的第 15 項

例 3.2：設一等差數列的首項為 2，末項為 93，公差為 7，則這個等差數列共有幾項？

Ex3.2：設一等差數列的首項為 7，末項為 -161 ，公差為 -6 ，則這個等差數列共有幾項？

例 3.3：設一等差數列的第 3 項為 12，第 5 項為 10，則：

- (1)公差為多少？ (2)首項為多少？ (3)第 15 項為多少？

Ex3.3：設一等差數列的第 3 項為 10，第 6 項為 22，則：

- (1)公差為多少？ (2)首項為多少？ (3)第 10 項為多少？

Ex3.31：設一等差數列的第 7 項為 13，第 13 項為 7，則：

- (1)公差為多少？ (2)首項為多少？ (3)第 20 項為多少？

Ex3.32：設一等差數列的第 5 項為 $-\frac{7}{4}$ ，第 8 項為 $\frac{1}{2}$ ，則：

- (1)公差為多少？ (2)首項為多少？ (3)第幾項為 2？

例 3.4：自 200 到 1000 的整數中，3 的倍數有幾個？

Ex3.4：自 32 到 400 的整數中，4 的倍數有幾個？

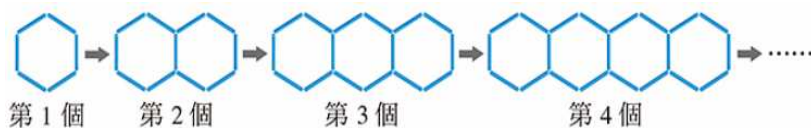
Ex3.41：(1)已知奇數 1, 3, 5, 7, 9, ... 成等差數列，試求等差數列的第 n 項
 (2)已知偶數 2, 4, 6, 8, 10, ... 成等差數列，試求等差數列的第 n 項

例 3.5：用等長的吸管依次向右排出相連的正方形，如下圖，觀察圖形的規律並回答問題：



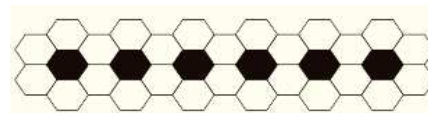
- (1)如果要排出第 10 個圖形，總共需要幾根吸管？
- (2)如果要排出第 n 個圖形，總共需要幾根吸管？
- (3)如果排出第 m 個圖形需要 40 根吸管，則 $m = ?$
- (4)用 87 根吸管是否能恰好排出如上圖相連的正方形？

Ex3.5：用等長的吸管依次向右排出相連的正六邊形，如下圖，觀察圖形的規律並回答問題：



- (1)如果要排出第 10 個圖形，總共需要幾根吸管？
- (2)如果要排出第 n 個圖形，需要 76 根吸管，則 $n = ?$
- (3)用 266 根吸管是否能恰好排出如上圖相連的正六邊形？

Ex3.51：有一長條鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成，右圖表示此鏈之一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子上有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？(A) 140 (B) 142 (C) 210 (D) 212



重點 4：等差中項

1. 定義：當 a, b, c 三數成等差數列時， b 稱為 a 和 c 的等差中項，此時 $b = \frac{a+c}{2}$

即三數成等差數列時，中間的那一項稱為另兩項的等差中項

註：當 a, b, c, d, e 五數成等差數列時，則 $2c = b + d = a + e$

2. 三數成等差數列的假設法：

當三數成等差數列時，若 a 為等差中項， d 為公差，則：

此三數可以寫成 $a-d, a, a+d$ 或 $a, a+d, a+2d$ 或 $a-2d, a-d, a$

例 4.1：已知 $-14, p, 7$ 成等差數列，求 -14 與 7 的等差中項 $p = ?$

Ex4.1：已知 $1, x, 9$ 成等差數列，求 1 與 9 的等差中項 $x = ?$

Ex4.11：已知 $-8, p, 22$ 成等差數列，求 -8 與 22 的等差中項 $p = ?$

Ex4.12：已知 $m, -25, n$ 成等差數列，求 $m+n = ?$

Ex：已知 $a, 5, c$ 成等差數列，求 $a+c=$ _____

Ex4.13：在 -11 與 9 之間插入三個數 a, b, c ，使得 $-11, a, b, c, 9$ 成為等差數列，則 $a+c-b=?$

例 4.2：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) $a-d, \underline{\hspace{2cm}}, a+d$

(2) $\underline{\hspace{2cm}}, 9, \underline{\hspace{2cm}}, 19, \underline{\hspace{2cm}}$

Ex4.2：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) $27, \underline{\hspace{2cm}}, 53, \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\underline{\hspace{2cm}}, 0, \underline{\hspace{2cm}}, 8, \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $a-3, \underline{\hspace{2cm}}, a+1, \underline{\hspace{2cm}}$

Ex：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) $-11, \underline{\hspace{2cm}}, 3, \underline{\hspace{2cm}}, 17, \underline{\hspace{2cm}}$

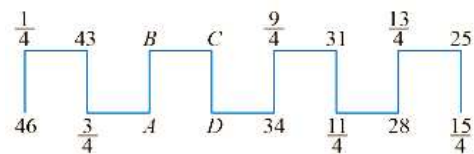
(2) $\underline{\hspace{2cm}}, 3-\sqrt{2}, \underline{\hspace{2cm}}, 3+\sqrt{2}, \underline{\hspace{2cm}}$

Ex：在下列各空格中填入適當的數，使每個數列成為等差數列：

(1) $\underline{\hspace{2cm}}, a-3d, \underline{\hspace{2cm}}, a+d, \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $5+\sqrt{3}, \underline{\hspace{2cm}}, 9+7\sqrt{3}, \underline{\hspace{2cm}}, 13+13\sqrt{3}$

Ex：觀察下列數字的排列，並求出 $A+B+C+D=?$



例 4.3：若一直角三角形三個內角的度數成等差數列，則這三個內角的度數分別為多少？

Ex4.3：若一三角形三個內角的度數成等差數列，且最小內角是 20° ，求最大內角的度數

Ex4.31：若一三角形三個內角的度數成等差數列，且最大內角是 80° ，求最小內角的度數

例 4.4：若兩數的等差中項為 9，且此兩數的積為 45，求此兩數

Ex4.4：若兩數的等差中項為 4，且此兩數的積為 -33 ，求此兩數

Ex：若兩數的等差中項為 5，且此兩數的差為 4，求此兩數

Ex：若兩數的差為 12，且此兩數的積為 54，求此兩數

Ex：若 a, b, c, d, e, f, g 為等差數列，且 $a+b+c+d+e+f+g=56$ ， $a \times g=28$ ，則此等差數列的公差為何？