Ch4.2 配方法與公式解　二年___班 座號：___ 姓名：

重點 1：利用平方根概念解一元二次方程式

意義：利用平方根的概念，求解形如 $x^2=k$，或$(ax+b)^2=k$，$k\geq 0$，$a\neq 0$ 的一元二次方程式

意即：(1)若 $x^2=k$ 時，得 $x=\pm\sqrt{k}$

(2)若$(ax+b)^2=k$ 時，$ax+b=\pm\sqrt{k}$ ，得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{k}}{a}$

註：$x^2=k$，或$(ax+b)^2=k$ 形式，稱為完全平方式

※利用平方根概念求解

例 1.1：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2=25$　(2) $(x+3)^2=16$　(3) $(x+1)^2=2$

Ex1.1：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2=121$　(2) $(x-4)^2=25$　(3) $(x-2)^2=3$　(4) $9x^2=25$

※化為平方根形式，再求解

例 1.2：解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+7)^2-3=0$　(2) $(2x-3)^2-7=4$

Ex1.2：解下列各一元二次方程式：

(1) $(x-3)^2-23=0$　(2) $(3x+5)^2-15=2$

Ex1.21：解下列各一元二次方程式：

(1) $(x-1)^2-19=0$　　(2) $(x+2)^2-21=0$

(3) $(4x-1)^2+4=35$　　(4) $(5x+6)^2+11=57$

重點 2：配方法

1.意義：一元二次方程式 $a\neq 0$，$ax^2+bx+c=0$，其中設判別式 $D=b^2-4ac$，則：

(1) $D=b^2-4ac>0$，且不是完全平方數時，利用配方法求解 (亦可利用公式法求解)

(2) $D=b^2-4ac=0$ 時，可以因式分解為完全平方式，利用平方根概念求解

(3) $D=b^2-4ac<0$ 時，無實數解

2.配方法：利用和的平方公式或差的平方公式，將一個式子配成完全平方式的方法，稱為**配方法**

(1)形如 x^2+px 的式子加上 $(\frac{p}{2})^2$ 可配成完全平方式，即 $x^2+px+(\frac{p}{2})^2=(x+\frac{p}{2})^2$

(2)形如 x^2-px 的式子加上 $(\frac{p}{2})^2$ 可配成完全平方式，即 $x^2-px+(\frac{p}{2})^2=(x-\frac{p}{2})^2$

註：配方時，加上「**一次項係數一半的平方**」，即可配成完全平方式

例 2.1：在下列各空格□中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式：

(1) $x^2+12x+\square$　　(2) $x^2-10x+\square$　　(2) $x^2-7x+\square$

Ex2.1：在下列各空格□或○中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式：

(1) $x^2-6x+\square=(x-\bigcirc)^2$　　(2) $x^2+18x+\square=(x+\bigcirc)^2$

(3) $x^2-\frac{1}{3}x+\square=(x-\bigcirc)^2$　　(4) $x^2+\frac{7}{3}x+\square=(x+\bigcirc)^2$

Ex2.11：在下列各空格□或○中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式：

(1) $x^2+8x+□=(x+○)^2$，則□＝_____，○＝_____

(2) $x^2+9x+□=(x+○)^2$，則□＝_____，○＝_____

(2) $x^2-\frac{5}{2}x+□=(x-○)^2$，則□＝_____，○＝_____

Ex2.12：(1)如果 x^2+nx+5^2 可以配成完全平方式，則 n＝______

(2)如果 $x^2-12x+p$ 可以配成完全平方式，則 p＝______

重點 3：利用配方法解一元二次方程式

1.意義：將一元二次方程式利用配方法整理成 $(x+b)^2=c$ 的形式，再利用平方根概念求解

2.配方法的步驟：一元二次方程式 $a\neq 0$，$ax^2+bx+c=0$

步驟 1：利用等量公理，將 x^2 項的係數化為 1

步驟 2：將常數項移至等號右方，即整理為 $x^2+mx=k$ 的形式

步驟 3：將 $x^2+mx=k$，等號兩邊同加 $(\frac{m}{2})^2$，即 $x^2+mx+(\frac{m}{2})^2=k+(\frac{m}{2})^2$

步驟 4：等號左邊化為完全平方式，右邊整理，即 $(x+\frac{m}{2})^2=\frac{4k+m^2}{4}$

步驟 5：利用平方根概念解出 x

例 3.1：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2+2x-2=0$　　(2) $x^2=x+1$　　(3) $x^2+6x=1$

Ex3.1：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2-10x=-3$　　(2) $x^2=2-5x$　　(3) $x^2+7x=5$

Ex3.11：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2-5x+1=0$　　(2) $x^2=3x+2$　　(3) $x^2+10x+6=0$　　(4) $x^2-8x=-7$

※常數項數字大時，利用配方法求解

例 3.2：解一元二次方程式 $x^2-4x-396=0$

Ex3.2：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2-6x=891$　　(2) $x^2+2x-99=0$　　(3) $x^2+2x=147$

Ex3.21：已知方程式 $x^2-5625=0$ 的兩根為±75，則下列何者為方程式 $x^2+6x-5616=0$ 的解？

(A) $x=69$　　(B) $x=72$　　(C) $x=77$　　(D) $x=81$　　(95-2 基)

※將 x^2 項係數化為 1(等量公理)
例 3.3：解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2+6x-1=0$　(2) $-2x^2+3x+1=0$　(3) $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

Ex3.3：解下列各一元二次方程式：

(1) $2x^2-8x+3=0$　(2) $-2x^2+x+4=0$　(3) $\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{3}y-2=0$

Ex3.31：解下列各一元二次方程式：

(1) $3+4x-6x^2=0$　(2) $-4x^2-4x+5=0$

(3) $3x^2-6x-5=0$　(4) $12x=-3x^2-10$

Ex3.32：小明利用配方法解一元二次方程式 $2x^2-6x-3=0$，下列是他的解題過程，請問他在哪一個步驟開始發生錯誤？

第一步：$x^2-3x=3$　第二步：$x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=3+(\frac{3}{2})^2$

第三步：$(x-\frac{3}{2})^2=\frac{21}{4}$　第四步：$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{21}{4}}$，$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

例 3.4：以配方法解一元二次方程式 $x^2+10x+a=0$，可得 $x=-5\pm\sqrt{51}$，則 a 為多少？

Ex3.4：以配方法解一元二次方程式 $x^2-8x+b=0$，可得 $x=4\pm\sqrt{7}$，則 b 為多少？

Ex3.41：(1)以配方法解一元二次方程式 $3x^2+6x+a=0$，可得 $x=-1\pm\sqrt{5}$，則 a 為多少？

(2)以配方法解一元二次方程式 $2x^2-mx+n=0$，可得 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$，則 $m+n$ 為多少？

Ex3.42：(1)以配方法解一元二次方程式 $x^2+6x+a=0$，可得 $x=-3\pm\sqrt{13}$，則 a 為多少？

(2)以配方法解一元二次方程式 $x^2+8x+b=0$，可得 $x=-4+\sqrt{2}$，則 b 為多少？

重點 4：利用公式法解一元二次方程式

意義：將一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，利用配方法得：

(1)當判別式 $D=b^2-4ac>0$ 時，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 為兩個**相異**實數根

(2)當判別式 $D=b^2-4ac=0$ 時，$x=\dfrac{-b}{2a}$ 為兩個**相等**實數根(或稱兩重根)

(3)當判別式 $D=b^2-4ac<0$ 時，x 為無實數解

註：當 $a\neq 0$，且 $D=b^2-4ac\geq 0$ 時，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，稱為公式解

例 4.1：利用判別式判斷下列各方程式解的情形：

(1) $4x^2+2x+\dfrac{1}{4}=0$　　(2) $2x^2-9x+5=0$　　(3) $2x^2+x+2=0$

Ex4.1：利用判別式判斷下列各方程式解的情形：

(1) $x^2+x+4=0$　　(2) $x^2-x-1=0$　　(3) $x^2-2x+1=0$　　(4) $x^2+x+1=0$

Ex4.11：(1)若方程式 $x^2+mx+25=0$ 有重根，則 m 的值為多少？

(2)若方程式 $2x^2-3x+k=0$ 有重根，則 k 的值為多少？

Ex4.12：若 x 的二次方程式$(k+3)x^2-5x+1=0$，試問：

(1)若此方程式的兩根相等，則 k 的值為多少？

(2)若此方程式有解，則 k 的範圍為何？

(3)若此方程式無解，則 k 的範圍為何？

例 4.2：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2-6x+4=0$ (2) $5x^2-13x+7=0$ (3) $3x^2+7x=-2$

Ex4.2：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2+8x+12=0$ (2) $x^2+11x+3=0$ (3) $3x^2+5x=7$ (4) $x^2=3x+3$

例 4.3：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2+22x+121=0$ (2) $2x^2+3x+4=0$ (2) $9x^2-30x+25=0$

Ex4.3：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2+x+\dfrac{1}{4}=0$　(2) $x^2-4x+5=0$　(3) $3x^2+4x+5=0$　(4) $x^2+8x+16=0$

※x^2 項係數為負數

例 4.4：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $-x^2-x+3=0$　(2) $-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}=0$　(3) $(x-1)(2-x)=-2x$

Ex4.4：利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $-5x^2+4x-1=0$　(2) $-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}=0$

(3) $x(1-3x)=3(-1+3x^2)$　(4) $\dfrac{x(x+5)}{4}-3=\dfrac{3(x-3)}{2}$

Ex4.41：利用公式解，求一元二次方程式$-2x^2+3x+1=0$的解

例 4.5：已知 x 的一元二次方程式 $x^2-10x+(5m+10)=0$ 有重根，求 m 之值及此方程式的解

Ex4.5：已知 x 的一元二次方程式 $x^2-8x+(3m+7)=0$ 有重根，求 m 之值及此方程式的解

Ex4.51：已知 $m<0$，且 x 的一元二次方程式 $x^2+mx+3x+9=0$ 有重根，求 m 之值及此方程式的解

Ex4.52：已知 $m>0$，且 x 的一元二次方程式 $x^2+mx+11=0$ 有重根，求 m 之值及此方程式的解

重點 5：一元二次方程式根與係數關係(韋達定理)

1.意義：設一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α、β，則：

兩根之和 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$

兩根之積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2.造方程式：

以 $x=\alpha$，$x=\beta$ 為兩根，則其方程式為$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

例 5.1：α、β 為方程式 $5x^2+6x-3=0$ 的兩根，則 $\alpha\times\beta$ 的值為多少？

Ex5.1：若方程式 $5x^2+7x-2=0$ 的兩根為 m、n，則 $m\times n+m+n=$？

Ex5.11：二次方程式 $ax^2+x+c=0$ 的二根為 2、-1，則 $a-c$ 是多少？