

Ch4.1 因式分解一元二次方程式

二年__班 座號：__ 姓名：

重點 1：一元二次方程式

意義：一個方程式化簡後可寫成 $ax^2+bx+c=0$ (其中 $a \neq 0$) 形式的方程式，稱為 x 的一元二次方程式。「一元」是指此方程式只含一種未知數 x ，「二次」是指 x 的最高次數是二次

註：方程式必須化簡後才能判定是否為一元二次方程式

例 1.1：判斷下列哪些是一元二次方程式：

(A) $x+3=0$

(B) $x^2+5x=-13$

(C) $(x-4)(x+3)=0$

(D) x^2+x-3

(E) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$

Ex1.1：判斷下列哪些是一元二次方程式：

(A) $x^2-6x=0$

(B) $2x(x-3)=2x^2+1$

(C) $\frac{1}{x}-4x=x-4$

(D) $(x-1)(2x+3)=0$

(E) $2-3x+6x^2$

(F) $|x^2|+x+1$

(G) $x^2+3x=x^2-13$

(H) $2x^2=3x$

重點 2：一元二次方程式的根或解

1. 意義：如果將一個數代入一元二次方程式的未知數 x 中，能使等號左、右兩邊的結果相等，則稱這個數就是此一元二次方程式的「解」或「根」

2. 解一元二次方程式：

求出一元二次方程式的解或根的過程，稱為解一元二次方程式

※判別一元二次方程式的解

例 2.1：(1) 試判斷 5 是否為一元二次方程式 $x^2+25x=50$ 的解？

(2) -1 是否為一元二次方程式 $x^2-5x=-2x+4$ 的解？

Ex2.1 : (1) 0 是否為一元二次方程式 $x^2 - 5 = 4x$ 的解?

(2) 4 和 -3 是否為一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解?

Ex2.11 : (1) -3 是否為一元二次方程式 $x^2 - 15x = 36$ 的解?

(2) 2 是否為一元二次方程式 $x^2 + 18x = 40$ 的解?

(3) -1 是否為一元二次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 2x - 1$ 的解?

(4) 4 是否為一元二次方程式 $3x^2 - 10x - 8 = (x+1)(x-4)$ 的解?

例 2.2 : 若 1 是一元二次方程式 $3x^2 - ax + 5 = 4$ 的解, 則 a 為多少?

Ex2.2 : 若 -1 是一元二次方程式 $x^2 - mx + 9 = 0$ 的解, 則 m 為多少?

Ex2.21 : (1) 若一元二次方程式 $(3x+2)(kx-7)=24$ 有一根是 2, 則 k 為多少?

(2) 若一元二次方程式 $6x^2 - 7x + n = 0$ 有一根是 $\frac{3}{2}$, 則 n 為多少?

重點 3：利用因式分解解一元二次方程式

1. 求解的性質：

設 A 、 B 為兩數，當 $A \times B = 0$ 時，則 A 和 B 至少有一個是 0，即 $A = 0$ 或 $B = 0$

註：當 $A \neq 0$ ， $B \neq 0$ 時，則 $A \times B \neq 0$

2. 因式分解解一元二次方程式：

利用**提公因式**、**分組提公因式**、**乘法公式**與**十字交乘**等因式分解法，配合解的性質，求解一元二次方程式

3. 重根：當一個一元二次方程式有兩個**相同的根**時，稱這個根為此方程式的重根

例 3.1：設 A 、 B 為兩數，且 $A \times B = 0$ ，請回答下列各題？

- (1) 當 $A \neq 0$ 時， B 是不是一定要等於 0
- (2) 當 $B \neq 0$ 時， A 是不是一定要等於 0
- (3) A 、 B 可不可能都是 0
- (4) A 、 B 可不可能都不是 0

Ex3.1：設 $ab = 0$ ，則下列哪一個選項一定正確？

- (A) $a = 0 = b$ (B) $a = 0$ ， $b \neq 0$ (C) $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ (D) $a = 0$ 或 $b = 0$

Ex3.11：若 A 、 B 是任意數，則下列敘述何者不正確？

- (A) 若 $A \times B \neq 0$ ，則 $A \neq 0$ 或 $B \neq 0$ (B) 若 $A \neq 0$ ， $B \neq 0$ ，則 $A \times B \neq 0$
(C) 若 $A = 0$ ， $B \neq 0$ ，則 $A \times B = 0$ (D) 若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$

例 3.2：找出下列各方程式的解：

- (1) $x(x + 3) = 0$ (2) $(4x - 2)(2x + 5) = 0$

Ex3.2：解下列各一元二次方程式的解：

(1) $x(x-1)=0$

(2) $(x-4)(x+9)=0$

(3) $(4x+1)(5x-10)=0$

(4) $(-x+5)(3x+2)=0$

(5) $(-3x+10)(2x+8)=0$

(6) $(7x-24)(-6x+18)$

※提公因式解方程式

例 3.3：解一元二次方程式 $2x^2+3x=0$

Ex2.3：解一元二次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+8x=0$

Ex2.31：解下列各一元二次方程式：

(1) $7x^2-49x=0$

(2) $3x^2+6x=0$

(3) $-4x^2+6x=0$

(4) $-3x^2-11x=0$

(5) $2x^2+\frac{5}{3}x=0$

(6) $-9x^2+\frac{3}{4}x=0$

※移項再提公因式

例 3.4：解一元二次方程式 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$

Ex3.4：解下列各一元二次方程式：

$$(1) (x+3)(x+4)=(x+3)(2x-1)$$

$$(2) (x-1)^2=(x-1)(2x+3)$$

Ex3.41：解下列各一元二次方程式：

$$(1) (x+3)(x-4)=(x-4)(2x-5)$$

$$(2) (x+2)(2x+1)=(2x+1)(3x-1)$$

$$(3) (x-3)(3x-1)=6-2x$$

$$(4) (x+6)^2=(x+6)(7x+1)$$

$$(5) (5-x)^2+(x-5)(2x+1)=0$$

$$(6) 2x(5x+4)=9(5x+4)$$

※利用十字交乘字交乘法

例 3.5：解下列各一元二次方程式：

$$(1) x^2-3x+2=0$$

$$(2) -4y^2+6y=-4$$

Ex3.5：解下列各一元二次方程式：

$$(1) -2x^2+13x-15=0$$

$$(2) 39y^2-15=-24y$$

Ex3.51：解下列各一元二次方程式：

$$(1) 6x^2-7x-3=0$$

$$(2) 18x^2-21x+5=0$$

$$(3) -8x^2-4x+24=0$$

Ex3.52：下列哪一個選項為方程式 $4x^2 - 16x + 15 = 0$ 的兩根？(95-1 基測)

- (A) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$

※利用乘法公式

例 3.6：解下列各一元二次方程式：

(1) $16x^2 - 1 = 0$ (2) $x^2 - 121 = 0$ (3) $9 - (\frac{4}{5}x)^2 = 0$

Ex3.6：解下列各一元二次方程式：

(1) $25x^2 - 16 = 0$ (2) $-16x^2 + 81 = 0$ (3) $-75x^2 + 108 = 0$ (3) $169 - \frac{9}{49}x^2 = 0$

※重根

例 3.8：(1) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (2) $-y^2 + y - \frac{1}{4} = 0$ (3) $9x^2 + \frac{1}{9} = -2x$

Ex3.8：解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2 + 22x = -121$ (2) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ (3) $16x^2 + 56x + 49 = 0$

Ex3.81：解下列各一元二次方程式：

$$(1) \frac{9}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2) 9x^2 - 15x + \frac{25}{4} = 0$$

$$(3) \frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + 1 = 0$$

重點 4：綜合應用

意義：綜合運用下列多種方法，求一元二次方程式相關解或未知數：

1. 先將乘積展開，再求解
2. 利用因式分解方法(提公因式、乘法公式、十字交乘等)分解，再求解
3. 由解反求一元二次方程式中的未知數

※展開，再求解

例 4.1：解下列一元二次方程式：

$$(1) (x-4)(2x-7)=1$$

$$(2) (2x+5)(x+4)=14$$

Ex4.1：解下列各一元二次方程式：

$$(1) y(y+10)=24$$

$$(2) (x-1)(x-2)=12$$

$$(3) (2x-3)(x-2)=1$$

Ex4.11：已知 a, b 為方程式 $2x^2 - 3(x+1) = -1$ 的兩根，且 $a < b$ ，則 $2a + b$ 之值 = _____

※展開或乘法公式，再求解

例 4.2：解下列各一元二次方程式：

(1) $(2x-3)^2=(3x-1)^2$

(2) $(-2x+1)^2=(5x+2)^2$

(3) $(5x-4)^2-(3x+2)^2=0$

Ex4.2：解下列各一元二次方程式：

(1) $(2x-3)^2-(x+1)^2=0$

(2) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$

(3) $(5x-3)^2=(x+2)^2$

(4) $(3x+2)^2=(13x+7)^2$

(5) $(\frac{1}{3}x+4)^2=(x-5)^2$

(6) $(\frac{3}{2}x+2)^2=(\frac{5}{2}x-3)^2$

※展開或十字交乘，再求解

例 4.3：解下列各一元二次方程式：

(1) $(x-1)^2+6(x-1)+8=0$

(2) $(x+3)^2-7(x+3)+10=0$

Ex4.3：解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+1)^2-2(x+1)+1=0$

(2) $(2x-5)^2-7(2x-5)-18=0$

(3) $(4x-3)^2+10(4x-3)+24=0$

Ex4.31：解下列各一元二次方程式：

(1) $9(x+1)^2 + 42(x+1) + 49 = 0$

(2) $8(x-3)^2 + 22(x-3) - 21 = 0$

(3) $6(2-3x)^2 - 13(3x-2) + 5 = 0$

例 4.4：若 x 的一元二次方程式 $x^2 - mx - 4m = 0$ 的一根為 4，則：

(1) m 值為_____

(2) 此一元二次方程式的另一根為_____？

Ex4.4：已知 x 的一元二次方程式 $x^2 + x + (3m - 2) = 0$ 的一根為 3，則：

(1) m 值為_____

(2) 此一元二次方程式的另一根為_____？

Ex4.41：已知 0 是方程式 $2x^2 - 5mx + (m - 2) = 0$ 的一根，則：

(1) m 值為_____

(2) 此一元二次方程式的另一根為_____？

Ex4.42：已知 x 的一元二次方程式 $(m^2 + 1)x^2 - (m^2 - 1)x + (m^2 + 5m + 4) = 0$ 的一根為 -1 ，
求 m 值為_____