

Ch 2.2 根式的運算

重點 1：根式與根式的表示

1. 根式：若一個算式中含有根號，如 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $3\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8} - 1$ 等，則稱此算式為**根式**

2. 根式的表示：

(1) 帶有根號的數也可以像整數、分數一樣做加、減、乘、除的運算，而且滿足加法、乘法的交換律、結合律及分配律

(2) 若 $a \neq 0$ ， $b \geq 0$ ，則：① $a \times \sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{b} \div a$ 寫成 $\frac{\sqrt{b}}{a}$ 或 $\frac{1}{a}\sqrt{b}$

例 1.1：下列敘述，正確的打「O」，錯誤的打「×」

(1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ 可寫成 $5\sqrt{5}$

(2) $4 \times \sqrt{\frac{3}{8}}$ 可寫成 $\sqrt{4\frac{3}{8}}$

(3) $\sqrt{6} \div \frac{7}{5}$ 可寫成 $\frac{7}{5}\sqrt{6}$

(4) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ 可寫成 $(\sqrt{2})^3$

Ex1.1：下列敘述，正確的打「O」，錯誤的打「×」

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ 可寫成 $3\sqrt{2}$

(2) $(-\frac{1}{2}) \times \sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sqrt{5} \div 3$ 可寫成 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $3 \times \sqrt{\frac{2}{5}}$ 可寫成 $\sqrt{\frac{6}{5}}$

例 1.2：計算下列各式的值：

(1) $(-2) \times 2\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$

(3) $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex1.2：計算下列各式的值：

(1) $\frac{3}{5} \times 5\sqrt{2}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{12} \times (-16)$

(3) $\frac{3\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{9}$

Ex1.21：計算下列各式的值：

(1) $(-5) \times (-2\sqrt{3})$

(2) $(-2\sqrt{13}) \times (-4)$

(3) $\frac{3}{4}\sqrt{2} \times (-\frac{1}{6})$

(4) $(-\frac{1}{5}) \times 4\sqrt{5}$

重點 2：根式的乘除法運算

1. 乘法運算：若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

註： $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$

2. 除法運算：若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

註：除以 \sqrt{b} ，可以看成乘上其倒數 $\frac{1}{\sqrt{b}}$

例 2.1：計算下列各式的值：

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

(2) $(-3\sqrt{6}) \times 2\sqrt{5}$

(3) $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$

Ex2.1：計算下列各式的值：

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{11}$

(2) $2\sqrt{7} \times (-3\sqrt{3})$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$

(4) $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$

Ex2.11：計算下列各式的值：

(1) $\frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{11}$

(3) $-\frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{4}{9}\sqrt{3}$

(4) $6\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}$

Ex2.12：已知 $a = -3\sqrt{2}$ ， $b = 4\sqrt{2}$ ， $c = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ ， $d = \frac{9}{2}\sqrt{5}$ ，試求：

- (1) $a \times b$ (2) $b \times d$ (3) $a \times c$ (4) $b \times c$

例 2.2：計算下列各式的值：

- (1) $\sqrt{35} \div \sqrt{5}$ (2) $(-6\sqrt{6}) \div (4\sqrt{3})$ (3) $\sqrt{\frac{4}{5}} \div \sqrt{\frac{2}{15}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

Ex2.2：計算下列各式的值：

- (1) $\sqrt{98} \div \sqrt{14}$ (2) $9\sqrt{14} \div (-3\sqrt{7})$ (3) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \div \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}}$

Ex2.21：計算下列各式的值：

- (1) $\sqrt{45} \div (-\sqrt{5})$ (2) $(-4\sqrt{21}) \div 2\sqrt{7}$ (3) $\sqrt{5\frac{5}{6}} \div (-\sqrt{5\frac{1}{4}})$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}} \div \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$

Ex2.22：已知 $a = -\sqrt{24}$ ， $b = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ ， $c = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ ， $d = \sqrt{\frac{12}{21}}$ ，試求：

- (1) $a \div b$ (2) $b \div c$ (3) $d \div b$ (4) $c \div a$

重點 3：化為最簡根式與有理化

1. 最簡根式：一個數 $a\sqrt{b}$ 中， a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中質因數的次數都是 1，則稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**

註：下列幾種情形都不是最簡根式：

(1) 根號內的整數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1，例如： $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$

(2) 根號內的數為分數或小數，例如： $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt{0.1}$

(3) 分數的分母含有根式，例如： $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. 根式的化簡：將一個不是最簡根式的數化簡為最簡根式的過程，就稱為**根式的化簡**

註：常利用質因數分解做**整數根式**的化簡

3. 分母有理化：將分母化為不帶有根號的過程，稱為**分母有理化**

註：分母有理化必須乘上**有理化因子**，如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2} + 1$ 等

註：常見的分母的有理化因式如下：

(1) \sqrt{a} 與 \sqrt{a} 互為有理化因式

(2) $a + \sqrt{b}$ 與 $a - \sqrt{b}$ 互為有理化因式

(3) $a + k\sqrt{b}$ 與 $a - k\sqrt{b}$ 互為有理化因式

(4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 互為有理化因式

(5) $m\sqrt{a} + n\sqrt{b}$ 與 $m\sqrt{a} - n\sqrt{b}$ 互為有理化因式

即有理化時，常利用 a^2 或平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

例 3.1：圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$$\sqrt{27} \quad \sqrt{36} \quad -\sqrt{42} \quad \frac{8}{3}\sqrt{15} \quad \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{\frac{6}{11}} \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

Ex3.1：圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$$\sqrt{35} \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \sqrt{66} \quad -\sqrt{0.2} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Ex3.11：圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$$\sqrt{63} \quad \sqrt{6} \quad 3\sqrt{2} \quad -7\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\sqrt{15} \quad -\frac{9}{\sqrt{6}}$$

Ex3.12：圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$$\sqrt{6.3} \quad \sqrt{28} \quad \frac{2\sqrt{7}}{7} \quad 4\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \sqrt{85} \quad -\sqrt{72} \quad \frac{3}{5}\sqrt{24} \quad \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ex3.13：圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$$-\sqrt{2} \quad \sqrt{18} \quad \sqrt{52} \quad \frac{\sqrt{39}}{2} \quad 6\sqrt{\frac{1}{10}} \quad \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{12}} \quad -\sqrt{0.001} \quad \frac{\sqrt{26}}{2}$$

例 3.2：將下列根式化為最簡根式：

$$(1)\sqrt{24} \quad (2)\sqrt{15} \times \sqrt{21} \quad (3)\sqrt{4 \times 3 \times 18}$$

Ex3.2：將下列根式化為最簡根式：

$$(1)\sqrt{80} \quad (2)\sqrt{12} \times \sqrt{20} \quad (3)\sqrt{64 \times 9 \times 121}$$

Ex3.21：將下列根式化為最簡根式：

$$(1)\frac{\sqrt{45}}{3} \quad (2)\sqrt{500} \quad (3)\sqrt{540} \quad (4)\sqrt{48 \times 42} \quad (5)\sqrt{60 \times 18} \quad (6)\sqrt{27} \times \sqrt{63}$$

Ex3.21：將下列根式化為最簡根式：

$$(1)\sqrt{6 \times 28 \times 24} \quad (2)\sqrt{8 \times 20 \times 65} \quad (3)\sqrt{39 \times 26 \times 3} \quad (4)\sqrt{30 \times 12 \times 75}$$

※分母單根式化簡(有理化)

例 3.3：將下列根式化為最簡根式：

$$(1) \frac{2}{\sqrt{10}} \quad (2) \sqrt{0.8} \quad (3) \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ex3.3：將下列根式化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (2) \sqrt{7.2} \quad (3) \sqrt{\frac{1}{5}} \div \sqrt{\frac{2}{15}}$$

Ex3.31：將下列根式化為最簡根式：

$$(1) -\sqrt{2\frac{1}{5}} \quad (2) \frac{2}{\sqrt{14}} \quad (3) \sqrt{2.4} \quad (4) \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}} \quad (5) 4\sqrt{0.125} \quad (6) 25\sqrt{0.84}$$

※分母二根式化簡(有理化)

例 3.4：將下列各式的分母有理化：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad (2) \frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \quad (3) \frac{2}{1-\sqrt{5}}$$

Ex3.4：將下列各式的分母有理化：

$$(1) \frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$(3) \frac{3}{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$$

$$(4) \frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$$

Ex3.41：化簡 $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 之值為何？

※分母三根式化簡(有理化)

例 3.8：將下列各式的分母有理化：

$$(1) \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{1}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

Ex3.8：將下列各式的分母有理化：

$$(1) \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{1}{3+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$$

重點 4：根式的近似值

意義：根式(整數、分數或小數)可以透過化為最簡根式後，再利用查表計算出其近似值

註：利用直式開方法，可以直接計算根式的近似值

例 4.1：利用右表，求出下列各數的近似值(以四捨五入法，求到小數點後第 3 位)

(1) $\sqrt{5.5}$ (2) $\sqrt{220}$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
55	3 025	7.416 198	23.45208
56	3 136	7.483 315	23.66432
57	3 249	7.549 834	23.87467
58	3 364	7.615 773	24.08319

Ex4.1：利用右表，求出下列各數的近似值(以四捨五入法，求到小數點後第 3 位)

(1) $\sqrt{5.7}$ (2) $\sqrt{21.36}$ (3) $\sqrt{5800}$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
55	3 025	7.416 198	23.45208
56	3 136	7.483 315	23.66432
57	3 249	7.549 834	23.87467
58	3 364	7.615 773	24.08319

Ex4.11：利用右表，求出下列各數的近似值(以四捨五入法，求到小數點後第 3 位)

(1) $\sqrt{3.3}$ (2) $\sqrt{10.24}$ (3) $\sqrt{120}$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
30	900	5.47723	17.3205
31	961	5.56776	17.6068
32	1024	5.65685	17.8885
33	1225	5.74456	18.1659

例 4.2：已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ，試計算 $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ 的近似值(以四捨五入法，求到小數點後第 2 位)

Ex4.2：已知 $\sqrt{5} \approx 2.236$ ，試計算 $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ 的近似值(以四捨五入法，求到小數點後第 2 位)

Ex4.21：已知 $\sqrt{3} \approx 1.732051$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449490$ ， $\sqrt{790} \approx 28.10694$ ， $\sqrt{850} \approx 29.15476$ ，試求：

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (2) $\sqrt{8.5}$ (3) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (4) $\sqrt{7.9}$ (以四捨五入法求到小數點後第 3 位)

重點 5：根式的四則運算

1. 同類方根：將兩個或兩個以上的根式化成形如 $a\sqrt{b}$ 的最簡根式後，若根號內的數 b 相同時，則稱它們是**同類方根**
2. 根式的加減運算：根式中的加減運算是將**同類方根合併**，不同類則不能合併
3. 根式的四則運算：根式進行四則運算時，與有理數的運算順序一樣，先乘方，後乘除，最後加減。有括號時先計算括號內的式子，且將每個根式當做單項式做運算

例 5.1：化簡下列根式，並判斷哪些是 $\sqrt{6}$ 的同類方根，若是的在 \square 內打 \checkmark ：

$$\square\sqrt{12} \quad \square\sqrt{24} \quad \square\sqrt{16} \quad \square\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \square\sqrt{13\frac{1}{2}}$$

Ex5.1：試判斷 $\sqrt{18}$ 、 $-\sqrt{\frac{1}{50}}$ 、 $2\sqrt{\frac{2}{9}}$ 三數是否為同類方根？

例 5.2：化簡下列根式：

$$(1) 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$

$$(2) 4\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$$

$$(3) 5\sqrt{10} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$$

Ex5.2：化簡下列根式：

$$(1) 7\sqrt{11} - 4\sqrt{11}$$

$$(2) 5\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{5}$$

Ex5.21：化簡下列根式：

(1) $5\sqrt{7} - (-\sqrt{7})$

(2) $3\sqrt{5} + (-2\sqrt{5})$

(3) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

(4) $3\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

例 5.3：化簡下列根式：

(1) $3\sqrt{2} + \sqrt{8}$

(2) $\sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{4\frac{25}{36}}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3}\sqrt{6}$

(4) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + (\sqrt{12} - \sqrt{45})$

Ex5.3：化簡下列根式：

(1) $4\sqrt{3} - \sqrt{12}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}$

(3) $\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{27} + \sqrt{50}$

Ex5.31：化簡下列根式：

(1) $3\sqrt{7} - \sqrt{28}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{45}$

(3) $\frac{5}{\sqrt{10}} - \frac{4}{9}\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{63} - \frac{2}{\sqrt{7}}$

Ex5.31：計算 $\frac{1}{4}\sqrt{48} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{12} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$

Ex5.32：判斷下列各敘述是否正確？

(1) $\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$

(2) $\sqrt{4+\frac{25}{36}} = 2 + \frac{5}{6}$

(3) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$

(4) $\sqrt{4\frac{25}{36}} = 2\frac{5}{6}$

例 5.4：化簡下列根式：

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{5}} \div \sqrt{\frac{1}{6}}$

(2) $(-4\sqrt{15}) \times (-\sqrt{\frac{1}{3}}) - 4\sqrt{5}$

Ex5.4：化簡下列根式：

(1) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{\frac{1}{3}} \div (2\sqrt{2})$

(2) $(-\sqrt{1\frac{2}{3}}) \times (-\sqrt{\frac{3}{10}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ex5.41：化簡下列根式：

(1) $(-4\sqrt{7}) \times 4\sqrt{\frac{1}{2}} \div (-\sqrt{14})$

(2) $(-2\sqrt{3}) \times 3\sqrt{\frac{1}{21}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$

Ex5.42：計算 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}} \div \sqrt{\frac{54}{12}} \times \sqrt{\frac{3}{6}}$ 的值為何？(100-1 基測)

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

例 5.5：化簡下列根式：

(1) $2\sqrt{3} \times (\sqrt{12} - \sqrt{2})$

(2) $(-3\sqrt{2} + \sqrt{15}) \div \sqrt{3}$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 1)$

Ex5.5：化簡下列根式：

(1) $\sqrt{24} - 2\sqrt{3} + \sqrt{15} \div \sqrt{12}$

(2) $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Ex5.51：化簡下列根式：

(1) $3\sqrt{8}(\sqrt{54} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$

(2) $\sqrt{12}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{18}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Ex5.51：計算 $\frac{10}{\sqrt{27}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} \div \sqrt{\frac{4}{75}} + \frac{\sqrt{60}}{3}$ 的值為何？

例 5.6：利用乘法公式化簡下列各式：

$$(1)(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$

$$(2)(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$$

Ex5.6：利用乘法公式化簡下列各式：

$$(1)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$$

$$(2)(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$$

Ex5.61：利用乘法公式化簡下列各式：

$$(1)(\sqrt{5}-2)^2$$

$$(2)(2\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$$

$$(3)(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})$$

Ex5.62：利用乘法公式化簡下列各式：

$$(1)(3\sqrt{6}+7)^2(7-3\sqrt{6})^2$$

$$(2)(2+\sqrt{3})^4(2-\sqrt{3})^5$$