

Ch 1.3 多項式的乘除運算

重點 1：多項式的乘法運算

前言：多項式的乘法運算可用橫式、直式(包括分離係數法)計算

1.符號簡記：連續幾個 x 相乘時，可用**指數形式**來簡記

註：一次式與一次式的乘積為二次式；一次式與二次式的乘積為三次式，餘類推...

2.乘法運算具有**交換律**和**結合律**：

多項式運算中，文字符號和數字相乘時，可任意調換順序相乘

3.單項式×單項式：將係數與文字符號分開相乘，然後把係數寫在文字符號前面

單項式×多項式：利用分配律，再仿單項式×單項式

多項式×多項式：利用分配律展開，再合併同類項

註：利用直式運算時，缺項部分，必須補上 0

※單項式×單項式

例 1.1：計算並化簡下列各式：

$$(1) 6x \cdot \frac{1}{2}x$$

$$(2) (-5x) \cdot 2x^2$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

Ex1.1：計算並化簡下列各式：

$$(1) (-7x) \cdot 5x$$

$$(2) (-5x)^2$$

$$(3) \frac{1}{2}x \cdot \left(-\frac{4}{5}x^2\right)$$

$$(4) 3x(-2x)^3 \left(-\frac{5}{6}x^2\right)$$

※單項式×多項式

例 1.2：利用分配律計算並化簡下列各式：

$$(1) 3x(x+2)$$

$$(2) (4x-3)(-2x)$$

Ex1.2：利用分配律計算並化簡下列各式：

$$(1) -2x(5x+2)$$

$$(2) (-2x+3)(-3x)$$

※多項式×多項式

例 1.3：分別利用橫式、直式計算並化簡下列各式：

(1) $(x+2)(x+3)$

(2) $(3x+1)(x+4)$

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$

Ex1.3：分別利用橫式、直式計算並化簡下列各式：

(1) $(x+3)(x+5)$

(2) $(x+2)(-3x+4)$

(3) $(x-1)(x^2+x+1)$

※直式運算，缺項補上 0

例 1.4：分別利用直式與分離係數法，計算並化簡下列各式：

(1) $(2x-1)(-3x+4)$

(2) $(5x^2-4)(-2x+3)$

Ex1.4：分別利用直式與分離係數法，計算並化簡下列各式：

(1) $(-2x-3)(x-6)$

(2) $(3x^2+2)(-4x-1)$

Ex1.41：展開 $(4x^3+5x^2-4x+1)(-5x^2+x-7)$ 後， x^2 項的係數是多少？

重點 2：利用乘法公式做多項式的乘法

常利用分配律配合下列各乘法公式，做多項式之展開

1. 和的平方： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. 差的平方： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

例 2.1：利用乘法公式，計算並化簡下列各式：

(1) $(-3x+4)^2$

(2) $(2x-5)^2$

(3) $(4x+7)(4x-7)$

Ex2.1：利用乘法公式，計算並化簡下列各式：

(1) $(4x+3)^2$

(2) $(5-2x)^2$

(3) $(2y+9)(2y-9)$

Ex2.11：利用乘法公式，計算並化簡下列各式：

(1) $(6x+3)^2$

(2) $(3x-5)^2$

(3) $(4x+3)(4x-3)$

(4) $(4x-5)^2$

(2) $(1-6x)^2$

(3) $(7-3x)(7+3x)$

重點 3：多項式的除法運算

1. 單項式除以單項式：將係數與文字符號分開相除，然後把係數寫在文字符號前面

註：(1) 根據指數律的性質做文字符號相除的運算

(2) 如果單項式的係數是正的，可將括號省略

2. 多項式除以單項式：利用長除法(或分離係數法)運算

註：(1) 多項式除法中，要做到餘式的次數比除式的次數小，或餘式為 0 才算完成

(2) 多項式除法中，通常分別將被除式、除式按降冪排列後再做運算；缺項時，必須補上 0

※單項式除以單項式

例 3.1：計算下列各式：

$$(1) (9x^2) \div (3x)$$

$$(2) (-4x^3) \div (2x)$$

$$(3) (14x^4) \div (-4x^2)$$

Ex3.1：計算下列各式：

$$(1) (-3x) \div x$$

$$(2) 11x^2 \div x$$

$$(3) 12x^2 \div (-4x)$$

$$(4) (-20x^3) \div 5x$$

$$(5) 36x^4 \div (-12x)$$

※多項式除以單項式

例 3.2：試求 $4x^2 + 8x - 2$ 除以 $4x$ 的商式與餘式

Ex3.2：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

$$(1) (x^2 + 8x) \div x$$

$$(2) (5x^2 + 10x) \div 5x$$

$$(3) (-6x^2 + 4x - 5) \div 2x$$

Ex3.2：試求下列各多項式除法的商式與餘式

(1) $(-8x^2 + 6x - 3) \div (-2x)$

(2) $(15x^2 - 10x + 4) \div 5x$

(3) $(18x^2 - 12x) \div 3x$

Ex3.21：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(9x^2 - 4x + 1) \div 3x$

(2) $(-8x + 10x^2 + 12x^3) \div (-4x)$

(3) $(36x^2 - 16x) \div 6x$

※多項式除以一次式

例 3.3：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(2x^2 - x - 6) \div (x - 2)$

(2) $(4x^3 + 2x^2 + 5) \div (2x - 1)$

Ex3.3：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(2x^2 - x - 6) \div (2x + 3)$

(2) $(x^3 + 3x^2 - 1) \div (x - 1)$

Ex3.31：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(2x^2 - x - 5) \div (2x - 3)$

(2) $(-2x^2 - 7x + 2) \div (x + 4)$

(3) $(3x^3 - 5x^2 + 3) \div (x - 2)$

※多項式除以二次式

例 3.4：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(2x^2 + 4x - 5) \div (x^2 + 3)$

(2) $(1 - 8x^2 + 3x^3 - 2x) \div (3x^2 - 9x + 1)$

Ex3.4：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(4x^2 - 2x + 1) \div (3x^2 + 2x + 1)$

(2) $(9x^2 + 14x + 2x^3) \div (5 + x^2 - 4x)$

Ex3.41：試求下列各多項式除法的商式與餘式：

(1) $(6x + 2 + 3x^2) \div (x^2 - 3)$

(2) $(3 - 4x^2 + x) \div (2x + 1)$

重點 3：多項式的除法原理

1. 意義：被除式 = 除式 × 商式 + 餘式

2. 整除：做多項式的除法運算時，當餘式為 0，則稱除式可以整除被除式

即對任意三個非零多項式 A、B、C，若 $A = B \times C$ ，

則稱 B 整除 A，商式為 C；也稱 C 整除 A，商式為 B

註：若 $A = B \times C$ ，則稱 A 為 B、C 的倍式，B、C 皆為 A 的因式例如： $2x^2 - x - 6 = (x - 2)(2x + 3)$ ，則 $2x^2 - x - 6$ 可被 $x - 2$ 或 $2x + 3$ 整除例 3.1：如果多項式 A 除以 $x + 2$ 的商式為 $3x^2 + 1$ ，餘式為 4，試求此多項式 A

Ex3.1：如果多項式 B 除以 $3x^2-1$ 的商式為 $2x+5$ ，餘式為 $x+2$ ，試求此多項式 B

- Ex3.11：(1)若多項式 A 除以 $x+3$ 的商式為 x^2+2 ，餘式為 5，試求此多項式 A
(2)若多項式 B 除以 $2x+1$ 的商式為 x^2+4x-5 ，餘式為 9，試求此多項式 B
(3)若多項式 C 除以 $x-6$ 的商式為 $3x^2-2$ ，餘式為 -5 ，試求此多項式 C

例 3.2：已知 $2x^2+7x+1$ 除以多項式 A 後，得到商式為 $2x+1$ ，餘式為 -2 ，試求此多項式 A

Ex3.2：已知 $8x^2+2x-15$ 除以多項式 B 後，得到商式為 $4x+7$ ，餘式為 6，試求此多項式 B

Ex3.21：多項式 F 除以多項式 G，得商式為 Q，餘式為 R，試求：

(1) $\frac{1}{2}F = G(\text{商式}) + (\text{餘式})$ ， \therefore 商式為_____，餘式為_____

(2) $3F = G(\text{商式}) + (\text{餘式})$ ， \therefore 商式為_____，餘式為_____

重點 4：綜合應用

1. 意義：多項式的四則運算規則與數的四則運算規則相同，都是按照由左到右、先乘除後加減、括號內先計算等的規則

2. 應用：將生活問題，透過多項式列式，並利用多項式運算規則找出問題的解

例 4.1：計算並化簡下列各式：

$$(1) (x+2)^2 + (2x+1)$$

$$(2) 5(2x+1)^2 - 3(x+1)(x+3)$$

Ex4.1：計算並化簡下列各式：

$$(1) 1 - 5(x-2)^2 + 2(x-1)$$

$$(2) (x+1)(x+2) - (x+3)(x+4)$$

Ex4.1：計算並化簡下列各式：

$$(1) (2x-1)^2 + (4x-5)$$

$$(2) (3x-8) - 2(x-3)^2$$

$$(3) (2x-3)(2x+3) - (3x+1)^2$$

Ex4.11：計算並化簡下列各式：

$$(1) 2(2x+5)^2 - (x-1)(x+3) + 4$$

$$(2) (3x-2)(x-2) - 4(x+1)^2 - (x-6)$$

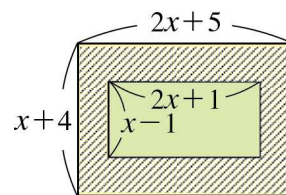
$$(3) 2(y-1)(y-3) - (y-4)(y-5)$$

例 4.2：已知 $(2x+3)(ax+b)$ 乘開化簡後是 $2x^2+5x+3$ ，求 a 、 b 之值

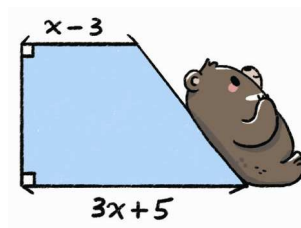
Ex4.2：已知 $(4x^2-1)(ax+b)$ 乘開化簡後是 $8x^3+12x^2-2x-3$ ，求 a 、 b 之值

Ex4.21：已知 $(ax^2+b)(2x-5)$ 乘開化簡後是 $-2x^3+5x^2+6x-15$ ，求 a 、 b 之值

例 4.3：右圖中，大長方形的長為 $2x+5$ 、寬為 $x+4$ ，小長方形的長為 $2x+1$ 、寬為 $x-1$ 。試以 x 的多項式表示斜線部分的周長與面積。



Ex4.3：右圖中，梯形的上底為 $x-3$ 、下底為 $3x+5$ 、面積為 $2x^2+5x+2$ ，試以 x 的多項式表示此梯形的高。



Ex4.31：右圖中，三角形的底為 $5a$ ，高為 $2a+8$ ，試以 x 的多項式表示此三角形的面積。

