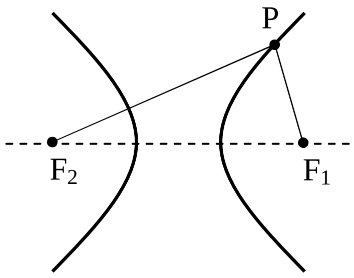
Ch 4.3 雙曲線(hyperbola) 二年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：雙曲線的基本概念

1.定義：如右圖，平面上，兩相異點 F_1，F_2，及一定長 $2a$ 滿足 $0<2a<\overline{F_1F_2}$，則：

所有滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 的動點 P 所成之圖形Γ，稱為「雙曲線」

其中 F_1，F_2 稱為雙曲線的「焦點(focus)」，如右圖



2.圖形之判斷：

A.平面上，滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 之 P 點軌跡：

(1)當 $0<2a<\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線

(2)當 $2a=\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為二射線

(3)當 $2a>\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

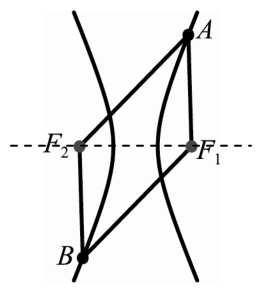
B.平面上，滿足 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a$ 之 P 點軌跡：

(1)當 $0<2a<\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線一支

(2)當 $2a=\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為一射線

(3)當 $2a>\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

例 1.1：右圖是一個以 F_1，F_2 為焦點的雙曲線，A，B 為雙曲線上的點。若 $\overline{AF_1}=5$，$\overline{AF_2}+\overline{BF_2}=12$，則 $\overline{BF_1}$ 的長為何?

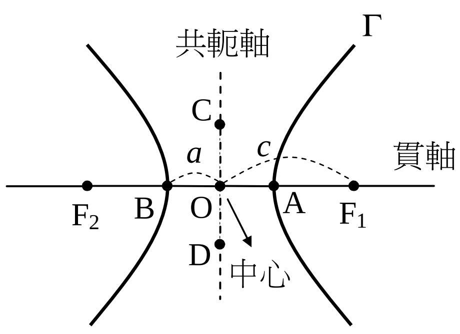


例 1.2：平面上二定點 F_1，F_2 與動點 P，且 $\overline{F_1F_2}=10$，試求下列各條件的點 P 之軌跡：

(1) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=8$ (2) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=10$ (3) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=12$

(4) $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=8$ (5) $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=10$

重點 2：雙曲線的名詞



1.焦點：二定點 F_1 與 F_2，且 $\overline{F_1F_2}=2c$

2.中心點：兩焦點 F_1 與 F_2 所成線段的中點

3.貫軸：焦點所在之軸，貫軸長度 $\overline{AB}=2a$

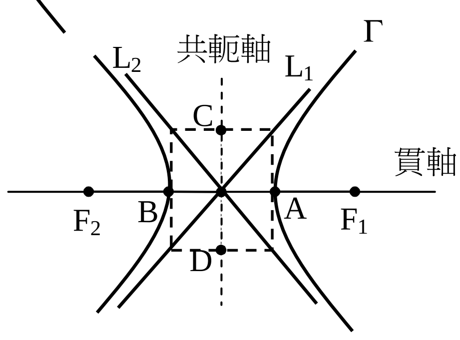
4.共軛軸：通過中心點與貫軸垂直，共軛軸長度 $\overline{CD}=2b$

註：貫軸、共軛軸都是雙曲線的「對稱軸」

5.關係式：$c^2=a^2+b^2$ (c 值最大，$c>a>0$，$c>b>0$)

6.頂點：雙曲線與貫軸之交點，如圖 A，B 點

註：廣義的頂點包含貫軸上的頂點 A，B；共軛軸上的頂點 C，D



7.弦：雙曲線上任兩點之連線段 (有無限多條)

焦弦：通過焦點之弦 (有無限多條)

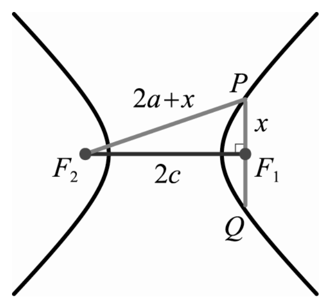
8.正焦弦：通過焦點與貫軸垂直的弦(有 2 條)，長度為 $\dfrac{2b^2}{a}$

註：設 $\overline{PQ}$ 為通過焦點 F_1 的正焦弦，令 $\overline{PF_1}=x$，如右圖

由雙曲線的定義可知 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$，$\Rightarrow \overline{PF_2}=2a+x$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 是直角三角形，$\Rightarrow x^2+(2c)^2=(2a+x)^2$

得 $x=\dfrac{c^2-a^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$ $(c^2=a^2+b^2)$，$\therefore \overline{PQ}=2x=\dfrac{2b^2}{a}$



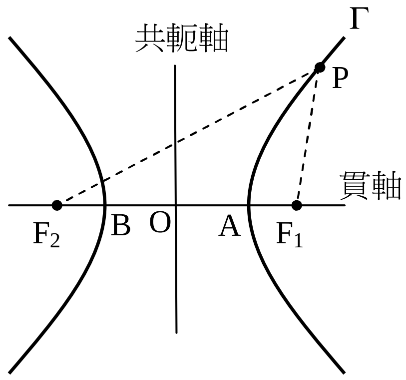
9.漸近線：在無窮遠處與雙曲線可以任意靠近但不相交的二直線，如 L_1，L_2

例 2.1：已知一雙曲線的貫軸長為 8，兩焦點間的距離為 10，試求此雙曲線的共軛軸長。

重點 3：雙曲線之標準式 I－水平貫軸

1.意義：雙曲線之中心在原點(0，0)，兩焦點為 $F_1(c，0)$，$F_2(-c，0)$，貫軸長 $2a$，共軛軸長 $2b$，滿足 $c^2=a^2+b^2$，

得雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，稱為水平貫軸之雙曲線



註：如右圖，設 $P(x,y)$ 是雙曲線上的任意一點，

由雙曲線的定義 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，$\Rightarrow \overline{PF_1}-\overline{PF_2}=\pm 2a$， $\therefore \overline{PF_1}=\overline{PF_2}\pm 2a$

得 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$

兩邊平方， $x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$

$\Rightarrow -cx-a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

再平方， $c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$，得 $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$

利用 $b^2=c^2-a^2$，$\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，同除以 a^2b^2，得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2.性質：

(1)關係式 $a^2+b^2=c^2$，$c>a>0$，$c>b>0$

(2)雙曲線上距離中心最近的點為頂點 A，B

(3)設 $P(x，y)$是雙曲線上任一點，則 $x\geq a$ 或 $x\leq -a$

(4)貫軸與共軛軸互相垂直平分於中心

(5)正焦弦長＝$\dfrac{2b^2}{a}$

(6)雙曲線以貫軸、共軛軸為對稱軸

3.若貫軸長＝共軛軸長，意即 $a=b$，則稱雙曲線為「等軸雙曲線」

4.雙曲線平移：

中心為原點的雙曲線 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的每一點$(x_0，y_0)$，沿著向量$(h，k)$移動到點$(x_0+h，y_0+k)$，

得中心為$(h，k)$的雙曲線 Γ_2，其方程式為：$\Gamma_2:\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

◎方程式

例 3.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(3，0)$與 $F_2(-3，0)$，貫軸長為 4，試求其方程式。

◎圖形名稱

例 3.2：已知一雙曲線的方程式為 $9x^2-16y^2=144$，試求其貫軸長、共軛軸長、中心、焦點及頂點坐標

◎平移方程式

例 3.3：已知一雙曲線的兩焦點為(－4，2)，(2，2)，貫軸長為 4，試求此雙曲線的方程式

◎平移圖形名稱

例 3.4：試求雙曲線 $4x^2-y^2-8x-2y-1=0$ 的頂點、焦點坐標與貫軸、共軛軸方程式，貫軸、共軛軸長與正交弦長。

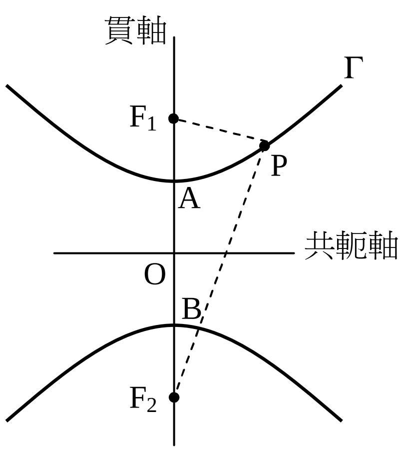
◎性質

例 3.5：設 P 為雙曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的一點。若 F_1，F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，試求 $\triangle F_1PF_2$ 的周長為何？

重點 4：雙曲線之標準式 II－鉛直貫軸

1.意義：雙曲線之中心在原點，兩焦點為 $F_1(0，c)$，$F_2(0，-c)$，貫軸長 $2a$，共軛軸長 $2b$，滿足 $c^2=a^2+b^2$，得雙曲線方程式為 $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，稱為鉛直貫軸之雙曲線

2.性質：如右圖，同水平貫軸雙曲線



3.雙曲線平移：

設雙曲線 $\Gamma：-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，中心由原點 $O(0，0)$平移至點$(h，k)$，

得雙曲線方程式為 $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

◎方程式

例 4.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(0，4)$與 $F_2(0，-4)$，共軛軸長為 4，試求其方程式

◎作圖，求各名稱

例 4.2：已知一雙曲線的方程式為 $9x^2-4y^2=-36$，試求其貫軸長、共軛軸長、中心、焦點及頂點坐標

◎平移方程式

例 4.3：求兩頂點為 A(－2，－1)與 B(－2，5)，一焦點為 F(－2，7)的雙曲線方程式

◎平移作圖，求各名稱

例 4.4：試求雙曲線 $4x^2-9y^2-8x+36y+4=0$ 的頂點、焦點坐標，貫軸、共軛軸方程式、貫軸、共軛軸長與正焦弦長。

重點 5：等軸雙曲線

意義：雙曲線的貫軸與共軛軸的長度相等，我們稱之為**等軸雙曲線**

◎方程式

例 5.1：試求兩焦點在 $F_1(4，0)$與 $F_2(-4，0)$，貫軸與共軛軸等長之雙曲線方程式

例 5.2：設方程式 $\dfrac{x^2}{4+t}-\dfrac{y^2}{10-t}=1$ 的圖形為等軸雙曲線，試求 t 值及其焦點坐標

重點 6：共軛雙曲線

1.意義：有共同中心的兩雙曲線，若其中一個雙曲線的貫軸及共軛軸分別為另一個雙曲線的共軛軸及貫軸，則此兩雙曲線互稱為**共軛雙曲線**

2.性質：

(1)將雙曲線方程式之常數「1」改為「－1」，即為**共軛雙曲線**的方程式

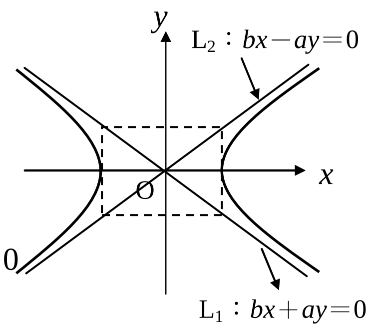
(2)它們有相同的中心與漸近線(參考重點 7)

例 6.1：試求雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$的共軛雙曲線

重點 7：雙曲線之漸近線

1.定義：若 P 點沿著雙曲線向遠處移動逐漸遠離中心時，如果 P 點至直線 L 的距離越來越近，而趨近於 0，稱直線 L 為雙曲線的一條**漸近線**。

2.漸近線求法：

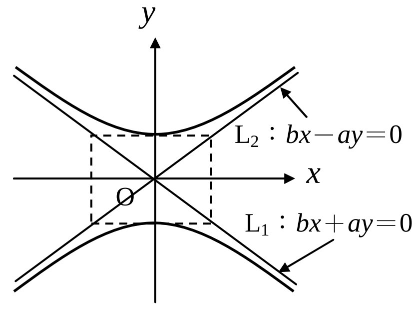


(1)若 Γ 為水平貫軸雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 時，則令 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，得 $(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=0$

得知漸近線為 L_1：$bx-ay=0$ 與 L_2：$bx+ay=0$

(2)平移後水平貫軸雙曲線 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的漸近線方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$

即 $b(x-h)-a(y-k)=0$ 與 $b(x-h)+a(y-k)=0$



(3)若 Γ 為鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 時，則令 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$，得 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$

得知漸近線為 $bx-ay=0$ 與 $bx+ay=0$

(4)平移後鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{(x-k)^2}{b^2}+\frac{(y-h)^2}{a^2}=1$，

其漸近線方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$，即 $b(y-k)-a(x-h)=0$ 與 $b(y-k)+a(x-h)=0$

3.漸近線性質：

(1)雙曲線的任一漸近線必不與雙曲線相交

(2)兩條漸近線必相交於中心，即以原點為中心，貫軸長 $2a$ 和共軛軸長 $2b$ 張出的矩形的對角線

(3)雙曲線的兩漸近線的分角線必互相垂直，其中一條為貫軸，另一條為共軛軸

(4)一般雙曲線的兩漸近線不一定互相垂直；而等軸雙曲線的兩漸近線必互相垂直；
反之，兩漸近線必互相垂直的雙曲線為等軸雙曲線

(5)雙曲線上一點 P 到兩條漸近線 L_1，L_2 的距離分別為 d_1 與 d_2，則 $d_1\cdot d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 是一個常數

註：設 $P(x_0,y_0)$ 為雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點，P 到直線 $L_1:bx-ay=0$ 與 $L_2:bx+ay=0$ 的距離分別為 d_1 與 d_2

利用點到直線的距離公式，得 $d_1=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$d_2=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

且 $P(x_0,y_0)$ 在雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，$\therefore \frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$

$$d_1\cdot d_2=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$ 是一個常數

例 7.1：試求雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的兩漸近線方程式

例 7.2：求雙曲線 $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 的兩條漸近線方程式

例 7.3：試求雙曲線 $4x^2-9y^2-8x+36y+4=0$ 的漸近線方程式

例 7.4：已知一雙曲線 Γ 的兩漸近線為 L_1：$3x-4y+2=0$ 與 L_2：$3x+4y-14=0$，且通過點(6，2)，試求雙曲線 Γ 方程式。

重點 8：雙曲線圖形之伸縮與應用

1.雙曲線方程式特性 (見例 7.1)

2.與橢圓、拋物線之關係

3.雙曲線圖形之伸縮：

(1)設雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，以原點為中心伸縮 k 倍，則其圖形仍然是雙曲線，方程式為 $\frac{x^2}{(ka)^2}-\frac{y^2}{(kb)^2}=1$

(2)設雙曲線 Γ：$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，以原點為中心伸縮 k 倍，則其圖形仍然是雙曲線，方程式為 $-\frac{x^2}{(kb)^2}+\frac{y^2}{(ka)^2}=1$

◎雙曲線特性

例 8.1：設方程式 $\frac{y^2}{9-t}-\frac{x^2}{36-t}=1$ 的圖形為雙曲線，試求實數 t 之範圍

例 8.2：試描述方程式 $4x^2-9y^2-24x-18y+63=0$ 的圖形

例 8.3：已知雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，將圖形 Γ 以原點為中心伸縮 3 倍，得到一個新雙曲線 Γ' 的圖形，試求雙曲線 Γ' 的方程式，並求其漸近線方程式。