Ch 4.2 橢圓(ellipse) 二年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：橢圓的基本概念

1.定義：平面上，有兩相異定點 F_1，F_2，及一定長 $2a$，且 $2a>\overline{F_1F_2}$，滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ 的動點 P 所成之圖形 Γ 稱為「橢圓」，其中 F_1，F_2 稱為 Γ 的「焦點(focus)」

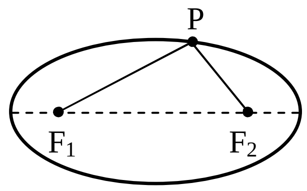
2.代數意義：

若設 $F_1(x_1, y_1)$，$F_2(x_2, y_2)$，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，即 $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$，則：

(1)若 $2a>\overline{F_1F_2}=2c$，則動點 P 的軌跡為一橢圓

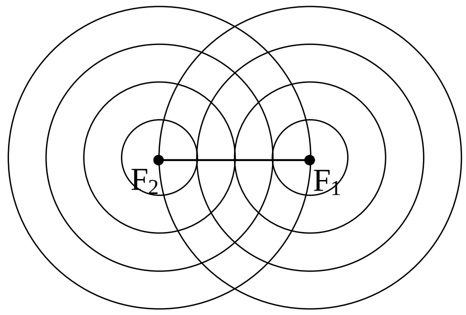
(2)若 $2a=\overline{F_1F_2}=2c$，則動點 P 的軌跡為一線段 $\overline{F_1F_2}$

(3)若 $2a<\overline{F_1F_2}=2c$，則動點 P 的軌跡為空集合(即無圖形或不存在)



例 1.1：右圖是以 F_1，F_2 為圓心的兩組同心圓，各組四個同心圓的半徑分別為 1，2，3，4，且 $\overline{F_1F_2}=4$，如果有一橢圓 Γ 以 F_1，F_2 為焦點，且此橢圓上的點到 F_1 與 F_2 的距離和為 5，請利用同心圓的交點找出橢圓 Γ 上的點，並利用平滑的曲線連接起來。

解：

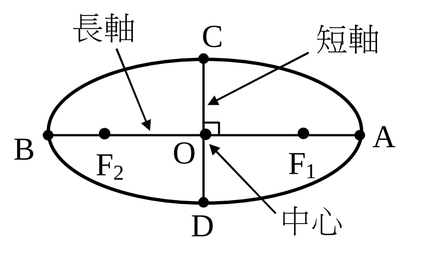


例 1.2：設方程式 $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=k$，試由 k 之值，討論方程式之軌跡。

重點 2：橢圓的相關名詞

1.焦點(focus)：F_1，F_2 二點，長度習慣用 $2c$ 表示，即 $\overline{F_1F_2}=2c$

2.中心(center)：長軸與短軸的交點，或 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，稱為中心，如右圖之 O 點



3.頂點(vertex)：A 與 B 點是長軸頂點；C 與 D 點是短軸頂點

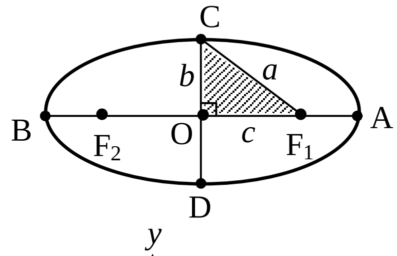
註：橢圓有 4 個頂點

4.長軸(major axis)：通過兩頂點 A 與 B 點之連線，長軸長：$\overline{AB}=2a$

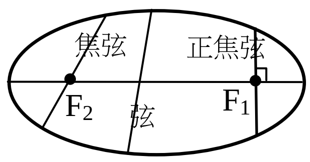
5.短軸(minor axis)：過中心且垂直長軸之直線交橢圓的線段，短軸長：$\overline{CD}=2b$

註：(1)關係式 $a^2=b^2+c^2$，$a>b$，$a>c$，如右圖

(2)橢圓對稱於其長軸、短軸與中心



6.焦半徑(focal radius)：$\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PF_2}$



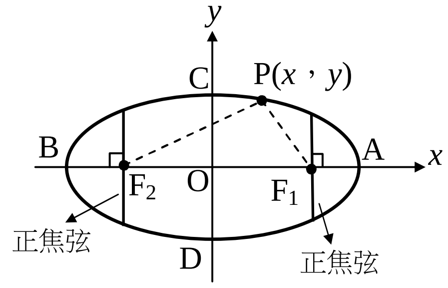
7.弦(chord)：橢圓上任兩點之連接線段稱為「弦」

8.焦弦(focal chord)：過焦點之弦稱為「焦弦」

9.正焦弦(latus rectum)：與長軸垂直的焦弦，稱為「正焦弦」

註：一橢圓有無限多條的**弦**與**焦弦**，只有兩條**正焦弦**

10.正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}$



註：(1)長軸長：短軸長＝短軸長：正焦弦長＝a：b

(2)兩焦點越近，橢圓形狀越圓；兩焦點越遠，橢圓形狀越扁

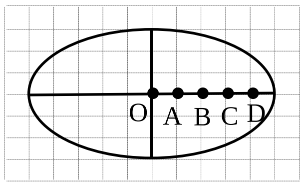
◎定義法

例 2.1：設橢圓 Γ：$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=6$，試求Γ的焦點與中心坐標。

◎關係式

例 2.2：設一個橢圓的長軸半長為 5，短軸半長為 4，試求此橢圓的兩焦點的距離與正焦弦長。

例 2.3：如右圖，A，B，C，D 四個點中有一點是橢圓的焦點，選出該焦點。



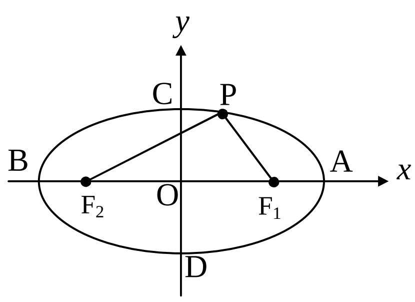
重點 3：橢圓的標準式 I (standard form I)(水平長軸)

1.定義：設 $a>c>0$，一橢圓之兩焦點 $F_1(c,0)$，$F_2(-c,0)$，且 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

即 $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$，如右圖

長軸長為 $2a$，短軸長為 $2b$，且 $a^2=b^2+c^2$

則 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 稱為橢圓標準式 I (水平長軸之橢圓)



2.說明：

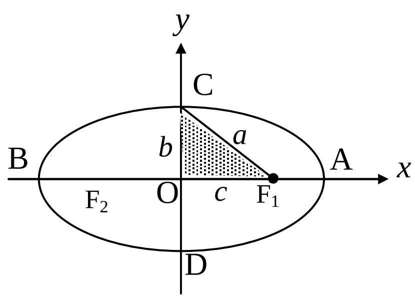
設平面上有一以 $2a$ 長為長軸之橢圓Γ，其中心為原點 O 長軸所在直線為 x 軸

焦點坐標分別為 $F_1(c,0)$，$F_2(-c,0)$且 $0<c<a$，點 $P(x,y)$為橢圓上任一點

則因為 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，即 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$，

$\Rightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，平方化簡得$\Rightarrow a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

平方，令 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，得 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，同除 a^2b^2 得證 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



3.橢圓平移：

當橢圓的中心(0，0)平移到(h,k)，其方程式由 Γ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 改變為 Γ_2：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

而平移後其圖形的形狀與正焦弦長不改變，但是改變了中心、焦點、頂點等坐標

4.橢圓伸縮：

將橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的圖形以原點為中心伸縮 t 倍($t>0$)，可得到橢圓 Γ_2：$\dfrac{x^2}{(ta)^2}+\dfrac{y^2}{(tb)^2}=1$ 的圖形

◎橢圓方程式

例 3.1：已知橢圓的兩焦點 $F_1(2,0)$，$F_2(-2,0)$，長軸長為 6，試求此橢圓方程式。

例 3.2：試求橢圓$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$之兩焦點坐標及中心坐標，並將它化簡成$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$之形式

◎圖形的各名稱

例 3.3：已知橢圓Γ：$9x^2+16y^2=144$，試求其：

(1)中心坐標 (2)焦點坐標 (3)頂點坐標 (4)長軸方程式及長軸長

(5)短軸方程式及短軸長 (6)正焦弦長

◎平移方程式

例 3.4：已知將橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的圖形沿 x 軸方向平移 3 單位，再沿 y 軸方向平移 4 單位，可以得到橢圓Γ的圖形，試求橢圓Γ的方程式。

例 3.5：已知橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，將圖形$\Gamma$以原點為中心伸縮 3 倍，得到一個新橢圓$\Gamma'$的圖形，試求橢圓$\Gamma'$的方程式

例 3.6：已知一橢圓的兩焦點為(3，2)，(－1，2)，長軸長為 $2\sqrt{6}$，試求此橢圓的方程式

◎平移各名稱

例 3.7：已知橢圓Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$，試求其：

(1)中心坐標 (2)焦點坐標 (3)頂點坐標 (4)長軸方程式及長軸長

(5)短軸方程式及短軸長 (6)正焦弦長

例 3.8：試將橢圓 $4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$ 化為標準式，並求其頂點與焦點坐標

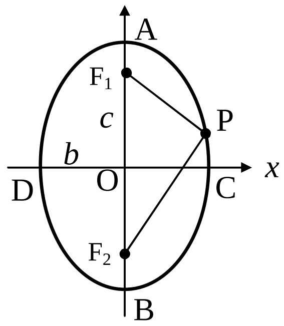
重點 4：橢圓的標準式 II (standard form II)(鉛直長軸)

1.定義：設 $a>c>0$，一橢圓之兩焦點 $F_1(0，c)$，$F_2(0，-c)$，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

即 $\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2a$，如右圖

且長軸長為 $2a$，短軸長為 $2b$，且 $a^2=b^2+c^2$

則 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 稱為橢圓標準式 II (鉛直長軸之橢圓)



2.橢圓平移：

當橢圓的中心(0，0)平移到$(h，k)$，其方程式由 Γ_1：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 改變為 Γ_2：$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

而平移後其圖形的形狀與正交弦長不改變，但是改變了中心、焦點、頂點等坐標

3.橢圓伸縮：

將橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的圖形以原點為中心伸縮 t 倍$(t>0)$，可得到橢圓 Γ_2：$\dfrac{x^2}{(tb)^2}+\dfrac{y^2}{(ta)^2}=1$ 的圖形

◎橢圓方程式

例 4.1：求焦點為 $F_1(0，3)$與 $F_2(0，-3)$，短軸長為 8 的橢圓方程式。

例 4.2：試求橢圓 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10$ 之兩焦點坐標及中心坐標，並將它化簡成 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 之形式

◎橢圓各名稱

例 4.3：已知一橢圓 Γ：$9x^2+4y^2=36$，試求其：

(1)中心坐標 (2)焦點坐標 (3)頂點坐標 (4)長軸方程式及長軸長

(5)短軸方程式及短軸長 (6)正焦弦長

◎平移方程式

例 4.4：已知將橢圓 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的圖形沿 x 軸方向平移 3 單位，再沿 y 軸方向平移 4 單位，可以得到橢圓 Γ 的圖形，試求橢圓 Γ 的方程式。

例 4.5：已知橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，將圖形 Γ 以原點為中心伸縮 3 倍，得到一個新橢圓 Γ'的圖形，試求橢圓 Γ'的方程式

例 4.6：已知橢圓兩頂點為(2，3)，(2，－7)，一焦點為(2，－6)，試求其方程式

◎平移各名稱

例 4.7：已知橢圓Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$，試求其：

(1)中心坐標 (2)焦點坐標 (3)頂點坐標 (4)長軸方程式及長軸長

(5)短軸方程式及短軸長 (6)正焦弦長

例 4.8：試將橢圓 $4x^2+3y^2-8x-12y+4=0$ 化為標準式，並求其頂點與焦點坐標。