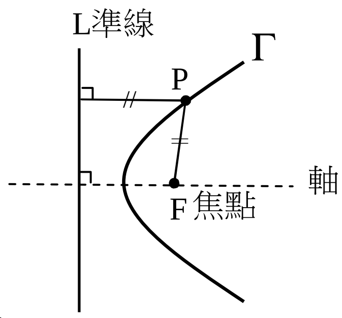
Ch 4.1 拋物線　　　　　　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：拋物線(parabola)

1.定義：平面上，有一直線 L 及直線 L 外一點 F。則平面上所有到直線 L 的距離等於到點 F 的距離之動點 P 所成之圖形Γ，即 d(P，F)＝d(P，L)，稱為「拋物線」，如右圖，其中直線 L 稱為拋物線Γ的「準線」，點 F 稱為「焦點」



2.拋物線的各要素名詞：

(1)對稱軸：通過焦點 F 且與準線 L 垂直的直線稱為**對稱軸**，簡稱**軸**。

(2)頂　點：對稱軸和拋物線Γ的交點稱為**頂點**，以 V 表示。

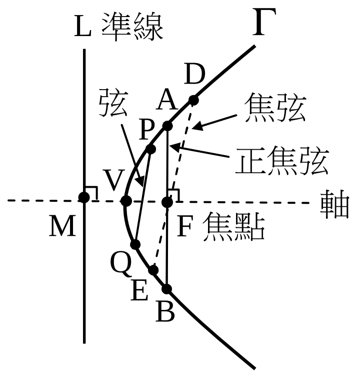
(3)焦　距：頂點 V 和焦點 F 的距離 $\overline{VF}$ 稱為**焦距**。

(4)弦　　：拋物線上任取兩相異點的連接線段稱為**弦**。

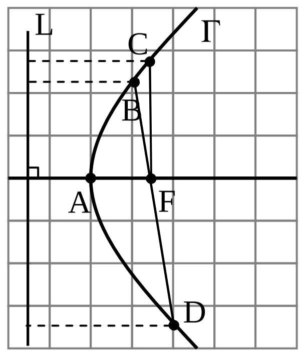
(5)焦　弦：過焦點的弦稱為**焦弦**，如 $\overline{DE}$

(6)正焦弦：與軸垂直的焦弦，稱為**正焦弦**，如 $\overline{AB}$

註：正焦弦長 $\overline{AB}=2\overline{AF}=4\overline{VF}$



例 1.1：如圖所示，若Γ表示以 F 為焦點，L 為準線的拋物線，A，B，C，D 四點在拋物線Γ上，試比較 $\overline{AF}$，$\overline{BF}$，$\overline{CF}$，$\overline{DF}$ 的大小。



重點 2：拋物線的數學方程式(定義法)

定義：設焦點 F(h，k)，準線 L：$ax+by+c=0$，$(ah+bk+c\neq 0)$，

則利用 d(P，F)＝d(P，L)，$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例 2.1：分別由拋物線的定義與標準式，求出滿足下列條件的拋物線方程式：

(1)焦點為 F(3，0)，準線為 L：$x=-3$

(2)焦點為 F(0，－1)，準線為 L：$y=1$

例 2.2：試求準線是直線 L：$x+y=-4$，焦點在 F(2，2)之拋物線方程式

重點 3：拋物線標準式 I (幾何法)(開口向右或向左型，或稱水平對稱軸拋物線)

1.意義：以直線 L：$x=-c$，$c\neq 0$ 為準線，F(c，0)為焦點的拋物線方程式為 $y^2=4cx$，稱為**標準式 I**

註：設 P(x，y)為拋物線Γ上一點，根據定義，⇒∵d(P，F)＝d(P，L)，∴$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|x+c|$，得 $y^2=4cx$

2.拋物線 $y^2=4cx$ 的基本性質，如下圖：

(1)當 $c>0$ 時，拋物線開口向右
　當 $c<0$ 時，拋物線開口向左

(2)準線：$x=-c$

(3)焦點：F(c，0)

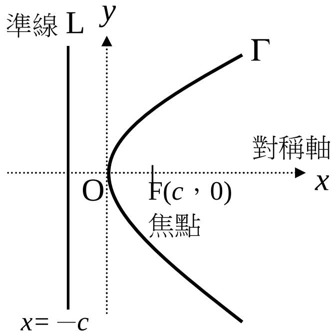
(4)頂點：原點 O(0，0)

(5)對稱軸：x 軸

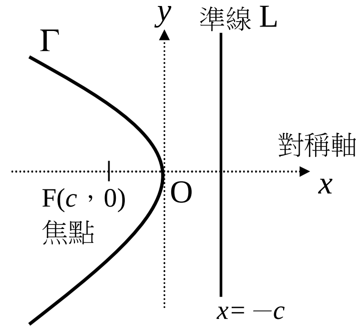
(6)焦距：$|c|$

(7)正焦弦長：$4|c|$

註：Γ：$y^2=4cx$ 之對稱軸為 $y=0$



$\underline{c>0}$



$\underline{c<0}$

3.平移：

將拋物線 $\Gamma_1: y^2=4cx$ 上的每一點(x_0，y_0)沿著向量(h，k)移動到點(x_0+h，y_0+k)，得 $\Gamma_2:(y-k)^2=4c(x-h)$

註：(1)拋物線 Γ_2 的頂點為 V(h，k)，焦點為 $F(h+c，k)$，對稱軸為 $y-k=0$

(2)拋物線平移向量(h，k)後，其開口方向、大小、形狀等均不變

◎求方程式

例 3.1：試求焦點為 F(3，0)，準線為 L：$x=-3$ 的拋物線方程式。

◎求各名稱

例 3.2：求拋物線 $y^2=-8x$ 的頂點、焦點坐標、準線方程式與對稱軸方程式

◎求平移後方程式

例 3.3：已知一拋物線的準線是 L：$x=-3$，焦點為 F(−1，2)，試求此拋物線的方程式

◎平移求各名稱

例 3.4：求拋物線$(y-2)^2=8(x+1)$的焦點坐標與準線方程式

例 3.5：已知一拋物線的方程式為 $y^2+8x-4y-4=0$，試求其頂點坐標、對稱軸方程式、焦點坐標及準線方程式。

重點 4：拋物線標準式 II (幾何法)(開口向上或下，或稱鉛直對稱軸拋物線)

1.意義：以直線 L：$y=-c$，$c\neq 0$ 為準線，F(0，c)為焦點的拋物線方程式為 $x^2=4cy$，稱為標準式 II

註：設 P(x，y)為拋物線Γ上一點，根據定義，⇒∵d(P，F)＝d(P，L)，∴$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=|y+c|$，得 $x^2=4cy$

2.拋物線 $x^2=4cy$ 的基本性質，如下圖：

(1)當 $c>0$ 時，拋物線開口向上
　當 $c<0$ 時，拋物線開口向下

(2)準線：$y=-c$

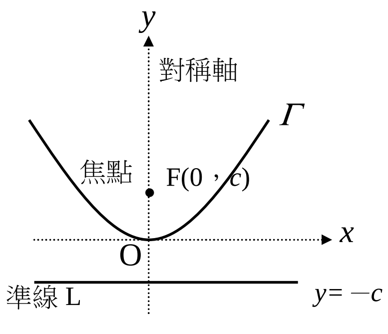
(3)焦點：F(0，c)

(4)頂點：原點 O(0，0)

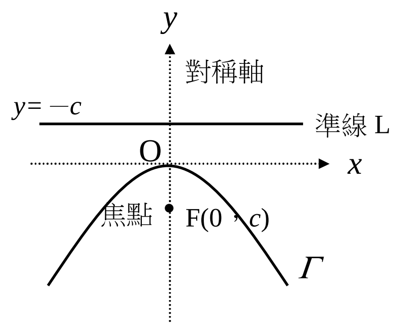
(5)對稱軸：y 軸

(6)焦距：$|c|$

(7)正焦弦長：$4|c|$



$c>0$



$c<0$

註：(1) Γ：$x^2=4cy$ 之對稱軸為 $x=0$
　(2)方程式 $x^2=4cy$ 與 $y^2=4cx$ 的圖形，對直線 $x-y=0$ 成對稱關係

3.平移：

將拋物線Γ_1：$x^2=4cy$ 上的每一點$(x_0，y_0)$沿著向量(h，k)移動到點$(x_0+h，y_0+k)$，得Γ_2：$(x-h)^2=4c(y-k)$

註：(1)拋物線平移向量(h，k)後，其開口方向、大小、形狀等均不變
　(2) Γ：$(x-h)^2=4c(y-k)$之對稱軸為 $x-h=0$

◎求方程式

例：4.1：試求焦點為 F(0，－1)，準線為 L：$y=1$ 的拋物線方程式

◎求各名稱

例 4.2：試在平面上描繪拋物線Γ：$x^2=20y$ 圖形，並求其焦點、頂點坐標、對稱軸方程式與準線方程式

◎求平移後方程式

例 4.3：已知一拋物線的準線是 L：$y=1$，焦點為 F(2，－3)，試求此拋物線的方程式

◎求平移各名稱

例 4.4：試在二次函數拋物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ 的圖形上，求其頂點坐標、對稱軸方程式、焦點坐標及準線方程式

重點 5：拋物線方程式之其他求法

拋物線方程式的求法，除利用定義與標準式 I，II 外，尚有重要求法如下：

1.準線或對稱軸並非鉛直(或水平)直線－利用準線與對稱軸垂直

2.已知對稱軸方程式，則

(1)對稱軸方程式為 $x=h$，設拋物線Γ：$(x-h)^2=4c(y-k)$

(2)對稱軸方程式為 $y=k$，設拋物線Γ：$(y-k)^2=4c(x-h)$

3.已知對稱軸平行(或垂直) x 軸(或 y 軸)

(1)若拋物線的軸為水平線(平行 x 軸，準線為鉛直線，開口向左或向右)，
則設拋物線方程式Γ：$y^2=ax+by+c$；或 $x=ay^2+by+c$

(2)若拋物線的軸為鉛直線(平行 y 軸，準線為水平線，開口向上或向下)，
則設拋物線方程式Γ：$x^2=ax+by+c$；或 $y=ax^2+bx+c$

◎給予拋物線之定義

例 5.1：設拋物線Γ：$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\dfrac{|x+2y+2|}{\sqrt{5}}$，試求：

(1)焦點坐標　　(2)準線方程式　　(3)正焦弦長

例 5.2：已知一拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過(－2，1)，(2，－1)，(－1，2)三點，試求此拋物線的方程式

例 5.3：設拋物線Γ的對稱軸平行 y 軸，且過(1，6)，(－1，2)，(0，3)三點，試求此拋物線的方程式

◎已知對稱軸方程式為 $x=h$，則拋物線Γ：$(x-h)^2=4c(y-k)$

例 5.4：設一拋物線的對稱軸是直線 $x=1$，且通過 P(2，3)，Q(－1，9)兩點，試求此拋物線方程式。(LBe)

重點 6：拋物線的應用問題

意義：根據題意建立坐標，利用條件求其方程式，解得所求

例 6.1：已知有一自動灑水器如圖所示，其出水口距地面 1 公尺，噴出的水柱最高點距地面 2 公尺高，且與灑水器的水平距離為 2 公尺，試求灑水器噴出的水柱落在地面上後，離灑水器的最遠距離為多少公尺？