Ch 1.4 外積、體積與行列式　　　　二年____班　座號：____　姓名：

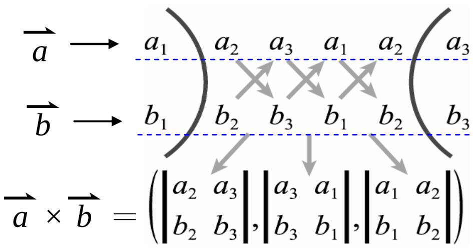
重點 1：空間向量的外積(cross product)

1.定義：坐標空間中任意兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1，a_2，a_3)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1，b_2，b_3)$的外積，定義為：

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$$是一個**向量**

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 讀作 $\overrightarrow{a}$ 外積 $\overrightarrow{b}$ 或 $\overrightarrow{a}$ cross $\overrightarrow{b}$

註：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 簡便求法，如右圖



2.向量外積的性質：

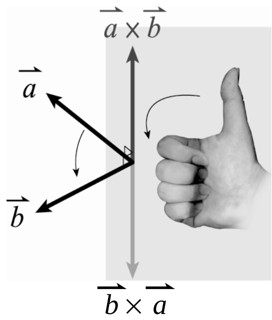
(1)外積 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的長度相同，方向相反，即 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$，如右圖

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的長度$=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=$由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積

(3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，如右圖

(4) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行時，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

(5)若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$



例 1.1：已知 $\overrightarrow{a}=(2，1，0)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，0)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$　　　　(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 是否與 $\overrightarrow{a}$ 或 $\overrightarrow{b}$ 垂直

例 1.2：設坐標空間中三點 $A(1，2，1)$，$B(0，6，4)$，$C(3，5，6)$，試求一單位向量，使其同時與 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直。

例 1.3：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 是空間中兩個向量，選出正確的選項：

(1)$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$　　　　(2) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$

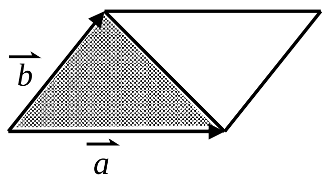
(3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b})$　　　　(4)若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{n}\perp(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

重點 2：空間中三角形的面積

1.意義：設 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為空間中兩個非零向量，則：

(1)由 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 所張出之平行四邊形的面積為 $|\vec{a}\times\vec{b}|$

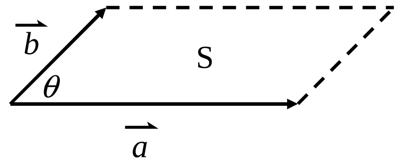
(2)由 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 所張出之三角形的面積為 $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$



註：若 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 為空間中不平行的兩非零向量，其夾角為 θ，且由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 S ，如下圖

由平行四邊形面積公式 $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

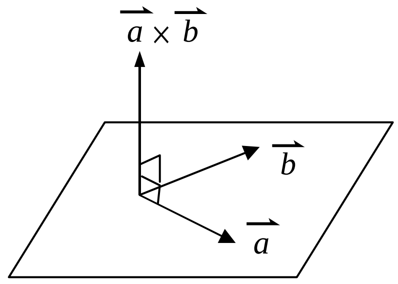
$$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$$



$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}$$



2.設坐標平面上不共線的三點 $A(a_1，a_2)$，$B(b_1，b_2)$，$C(c_1，c_2)$，則：

(1)利用 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1，b_2-a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1，c_2-a_2)$，則△ABC 的面積為 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{vmatrix}\right|$

(2)利用三階行列式，則△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}\right|$　(見重點 6)

例 2.1：已知空間中△ABC 的三頂點坐標分別為 A(0，1，2)，B(－2，3，5)，C(1，4，－1)，試求△ABC 的面積。

例 2.2：已知 $\vec{a}=(5，1，-3)$，$\vec{b}=(2，2，-1)$，試求由 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積

例 2.3：已知 A(1，2)，B(3，4)，C(－5，8)三點，試求△ABC 的面積。

◎重點 3：三階行列式(determimant)

1.二階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

2.三階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$

註：三階行列式的展開式的方法有：(1)**直接展開法**、(2)**降階展開法**

(1)直接展開法：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right.$

(2)降階展開法：三階行列式可依**某一行(列)展開**成二階行列式的組合，稱為降階展開法

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (依**第一行**展開)

$= -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ (依**第二列**展開)

$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

位置符號

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & \boxed{b_2} & \boxed{b_3} \\ c_1 & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}$

降階取法

例 3.1：試求下列三階行列式的值：(1)$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$　(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

◎重點 4：三階行列式運算性質

1.行列互換其值不變：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (以 a_1，b_2，c_3 為軸，將行列式翻面)

2.任意兩行(列)對調，其值變號：

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$ (第一、二兩行對調)

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ (第一、三兩列對調)

3.任一行(列)可以提出(乘上)同一因數

$\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (第二行提出 k)

$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (第一列提出 k)

4.兩行(列)成比例，其值為 0

$\begin{vmatrix} a_1 & ka_3 & a_3 \\ b_1 & kb_3 & b_3 \\ c_1 & kc_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ (第二、三兩行成比例)　$\begin{vmatrix} ka_3 & kb_3 & kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ (第一、三兩列成比例)

5.將一行(列)的 k 倍加到另一行(列)，其值不變

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+ka_3 & a_3 \\ b_1 & b_2+kb_3 & b_3 \\ c_1 & c_2+kc_3 & c_3 \end{vmatrix}$　$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

6.若某一行(列)之每個元素為兩行(列)元素的和時，則此行列式可拆分成為兩個行列式的和

$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+e_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$　$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

例 4.1：試求下列三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 17 \\ 50 & 2 & 35 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 10 \\ 7 & -12 & 15 \\ 9 & -28 & 35 \end{vmatrix}$

例 4.2：設 x 為實數，若 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -1 & 2+x & 3 \\ -1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$，試求 x 之值。

◎重點 5：凡德爾夢(Vandermonde)行列式

1.意義：三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$，稱為**凡德爾夢**行列式

2.常見行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}=0$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(3) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^4 \\ b & b^2 & b^4 \\ c & c^2 & c^4 \end{vmatrix}=abc(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & a & ab \\ 1 & b & bc \\ 1 & c & ca \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

(6) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

例 5.1：證明：$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

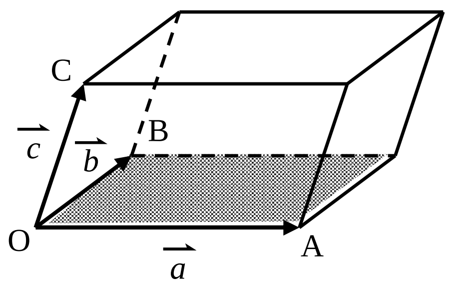
例 5.2：已知實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & -3 \\ x^2 & 25 & 9 \end{vmatrix}=0$，試求 x 的值。

◎重點 6：空間中平行六面體的體積

1.意義：空間中三個非零向量 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ 平移，使其不落在同一個平面上(不共平面)，如圖

則三向量張出之平行六面體的體積＝(底面積)×(高)＝$|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|$

註：體積 V＝$|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a}|=|(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}|=\boxed{|\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})|}$



2.設 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}=(b_1，b_2，b_3)$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}=(c_1，c_2，c_3)$

則由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 所張之平行六面體之體積＝$|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

3.四面體 O－ABC 之體積(三角錐)＝$\dfrac{1}{6}$ 平行六面體之體積＝$\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|$

4.若空間中三個非零向量 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ 平移後，落在同一個平面上(即共平面)，則 V＝0，或 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=0$

註：設坐標平面上不共線的三點 A$(a_1，a_2)$，B$(b_1，b_2)$，C$(c_1，c_2)$，則：

(1)利用 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1，b_2-a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1，c_2-a_2)$，則△ABC 的面積為＝$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}\right|$

(2)利用三階行列式，則△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$ (見重點 2)

例 6.1：設 $\overrightarrow{a}=(2，1，3)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，1)$，$\overrightarrow{c}=(-1，3，2)$，試求 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張出的平行六面體體積。

例 6.2：設 A(1，1，1)，B(3，2，4)，C(－1，2，5)，D(5，3，2)，試求四面體 ABCD 的體積。

例 6.3：設 A(－1，2，1)，B(2，－1，2)，C(1，2，3)，D(a，－a－1，－1)四點共平面，試求 a 之值。

例 6.4：已知 A(1，2)，B(3，4)，C(－5，8)三點，試求△ABC 的面積。(HBeP59)