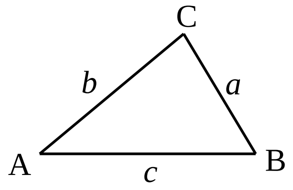
1.3 正弦定理與餘弦定理　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：三角形面積公式

1.公式 1：三角形(銳角、直角、鈍角)面積＝$\frac{1}{2}$(底×高)

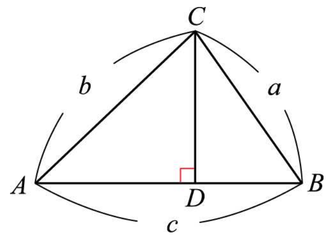


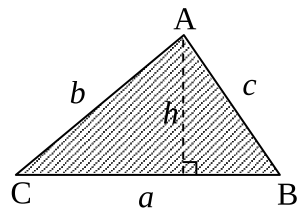
2.公式 2：(兩邊夾一角)

設△ABC 中，三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長分別為 a，b 與 c，如右圖

則 $\boxed{\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B}$ 背

說明：如右圖，C($b\cos A$，$b\sin A$)





$\Rightarrow$△ABC 面積＝$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times c\times b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$

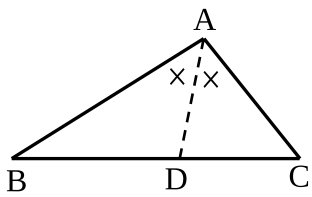
同理△ABC 面積＝$\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

例 1.1：在△ABC 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$ 且∠A＝60°，試求△ABC 的面積。

重點 2：內角分角線(內角平分線)定理 背

1.定理：設 $\overline{AD}$ 為△ABC 中 ∠A 的內角平分線交底邊 $\overline{BC}$ 於 D，如右圖，則：

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{BA}:\overline{AC}$，稱為內角平分線定理

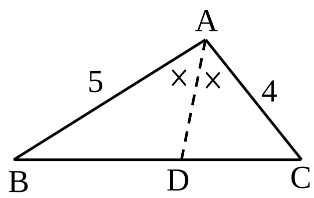


2.性質：(1) △ABD 面積：△ADC 面積＝$\overline{BD}:\overline{CD}$

(2) △ABC 面積＝△ABD 面積＋△ADC 面積

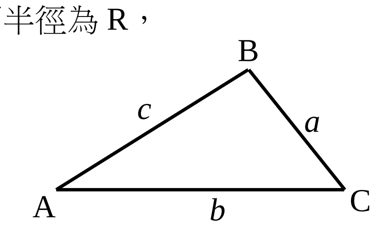
例 2.1：在△ABC 中，已知 $b=4$，$c=5$，∠A 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則：

(1)求面積比 ΔABD：ΔACD　　　(2)已知 ∠BAC＝120°，求 $\overline{AD}$ 長



重點 3：正弦定理 (角多，ASA、AAS、AAA)

1.定理：若 a，b 和 c 分別表示△ABC 三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長，又△ABC 的外接圓半徑為 R，



則 $\boxed{\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R}$，稱為**正弦定理** 背

說明：由三角形面積公式：面積 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

同除以 $\frac{1}{2}abc$ 可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2.性質：背

(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R=\dfrac{abc}{2\Delta}$，$\Delta$表示$\Delta$ABC 的面積，R 表示$\Delta$ABC 的外接圓半徑

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

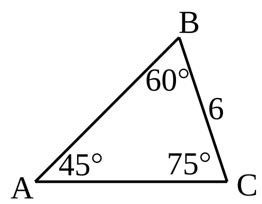
(3)設 h_a，h_b，h_c 分別表示ΔABC 三邊 a，b，c 的高，則 $a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}$ 或 $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$

例 3.1：在△ABC 中，已知 ∠A：∠B：∠C＝1：4：1，求 $a:b:c$。

※ASA

例 3.2：在△ABC 中，若 $\angle B=60°$，$\angle C=75°$，且 $\overline{BC}=6$，試求：

(1) $\overline{AC}$ 的長度　　(2) △ABC 的外接圓半徑

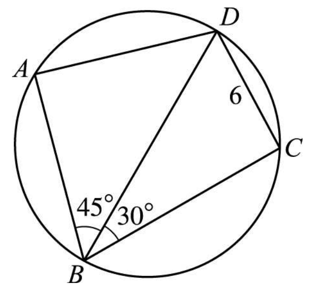


※SSA 相似

例 3.3：在△ABC 中，已知∠A＝45°，且 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=\sqrt{6}$，試求∠B 及∠C。

例 3.4：設 h_a，h_b，h_c 分別表示ΔABC 三邊 a，b，c 的高，且 $h_a:h_b:h_c=1:2:3$，試求 sinA：sinB：sinC。

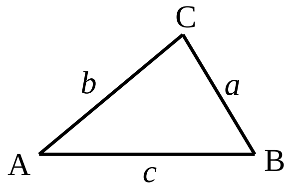
例 3.5：如右圖所示，ABCD 為圓內接四邊形，若∠DBC＝30°，∠ABD＝45°，且$\overline{CD}$＝6，求$\overline{AD}$的長度。



重點 4：餘弦定理 (邊多，SSS、SAS)

1.定理：若 a，b 和 c 分別表△ABC 三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長，如右圖

則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$，或 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$，統稱為**餘弦定理**



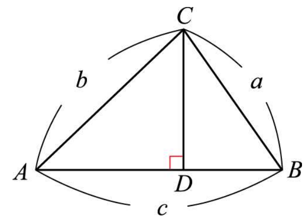
說明：1.△ABC 中，$\sin A=\dfrac{\overline{CD}}{b}$，$\cos A=\dfrac{\overline{AD}}{b}$，$\therefore \overline{CD}=b\sin A$，$\overline{AD}=b\cos A$

$\Rightarrow \overline{BD}=c-\overline{AD}=c-b\cos A$

直角三角形 BCD 中，$a^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2=b^2\sin^2 A+(c-b\cos A)^2$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A$



2.同理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$　及　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

2.性質：餘弦定理為畢氏定理的推廣(或 畢氏定理為餘弦定理的特例)

當∠A 是**銳角**時，則 cos A＞0，得知 $a^2<b^2+c^2$

當∠A 是**直角**時，則 cos A＝0，得知 $a^2=b^2+c^2$

當∠A 是**鈍角**時，則 cos A＜0，得知 $a^2>b^2+c^2$

※SAS

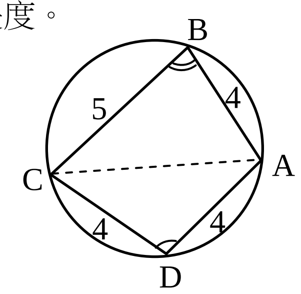
例 4.1：在△ABC 中，已知$\overline{AB}$＝5，$\overline{AC}$＝8，∠A＝60°，求$\overline{BC}$的長度。

※SSS

例 4.2 在△ABC 中，已知$\overline{AB}$＝3，$\overline{BC}$＝7，$\overline{AC}$＝8，求 ∠A 的角度。

例 4.3：如圖所示，在△ABC 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=7$，D 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\overline{BD}=3$，$\overline{CD}=2$，試求 $\overline{AD}$ 的長度。

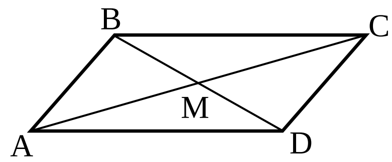
例 4.4：設 ABCD 為圓內接四邊形，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DA}=4$。求對角線 $\overline{AC}$ 的長度。



重點 5：平行四邊形定理與三角形中線定理

1.平行四邊形定理：平行四邊形 ABCD 中，四邊長的平方和＝對角線長的平方和

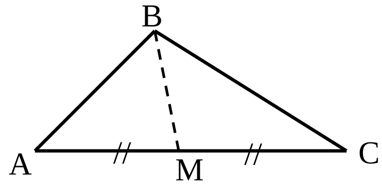
即 $\boxed{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2}$ 背



2.三角形中線定理：(平行四邊形定理的特例)

在△ABC 中，若 $\overline{BM}$ 為底邊 $\overline{AC}$ 的中線，如右圖

則 $\boxed{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)}$ 背



例 5.1：在△ABC 中，$\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線，且已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=6$，求中線 $\overline{AM}$ 的長度。

重點 6：海龍公式 (*Heron's formula*)

海龍公式：設 a，b 和 c 分別表△ABC 三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長，且 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 為周長的一半

則△ABC 的面積＝$\boxed{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$，稱為**海龍公式** 背

說明：△ABC 面積＝$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}[(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}=\sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b+c}{2}-a)(\frac{a+b+c}{2}-c)(\frac{a+b+c}{2}+c)}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例 6.1：在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，試求△ABC 的面積。

重點 7：正弦、餘弦函數的應用

1.利用正弦、餘弦運算公式，求解問題

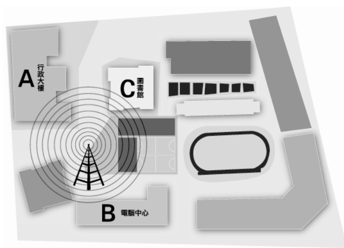
2.面積、內切、外切圓半徑關係：

(1)外接圓半徑 $R=\dfrac{abc}{4\Delta}$ (或 $abc=4\Delta R$，或 $\Delta=\dfrac{abc}{4R}$)

(2)內切圓半徑 $r=\dfrac{\Delta}{s}$ (或 $\Delta=rs$)

(3) $\Delta=rs=\dfrac{abc}{4R}$

例 7.1：某校欲在校園內與 A、B、C 三地都等距離的地方設置無線網路基地台，已知三地間的距離 $\overline{AB}=70$ 公尺，$\overline{AC}=80$ 公尺，$\overline{BC}=90$ 公尺，求基地台與三地的距離。



例 7.2：ΔABC 的三邊長是 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=9$，$\overline{BC}=12$，求 ΔABC 的面積與內切圓半徑。