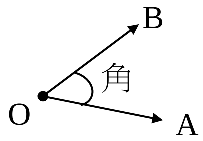
1.2 廣義角與極坐標　　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：廣義角

1.角：角是由共同端點的兩射線所組成的，如右圖，∠AOB 是由射線 OA 與射線 OB 所組成
又∠AOB 的大小是表示兩射線 OA 與 OB 張開的程度

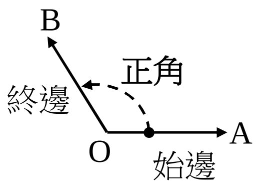


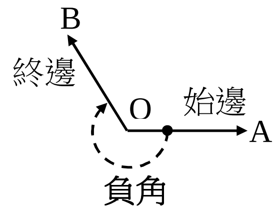
2.廣義角：①具突破 0~180 度的限制，且②具有方向性(正負)的角，稱為廣義角

(1)突破 0~180 度的限制：任一角度皆可稱為廣義角

(2)由射線 OA 以 O 點為中心旋轉至射線 OB，稱為**有向角**

設射線 OA 稱為角的**始邊**，射線 OB 稱為角的**終邊**，則：
依逆時針方向旋轉出的角為「**正角**」，且不限制旋轉的圈數
依順時針方向旋轉出的角為「**負角**」，且不限制旋轉的圈數

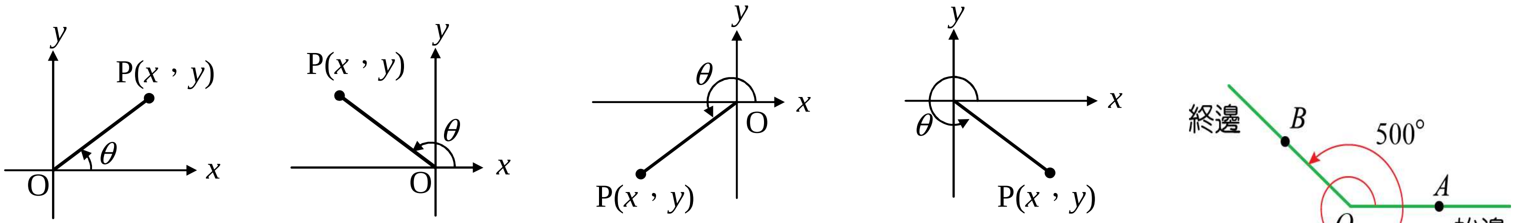




(3)標準位置角：以原點為角的頂點，以 x 軸正方向為起點的角稱為**標準位置角**

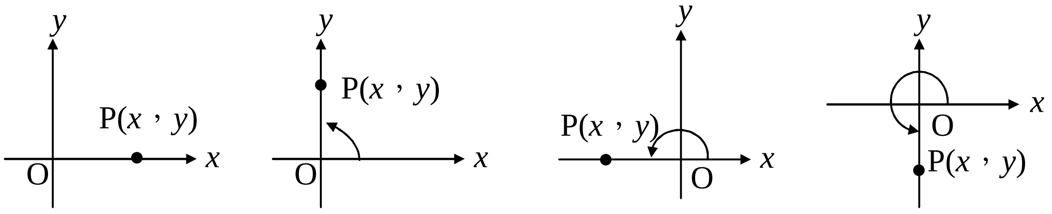
3.第□象限角與軸上角：

(1)第□象限角：廣義角的終邊落在第一、二、三或四象限內，稱這個角為第一、二、三或四象限角



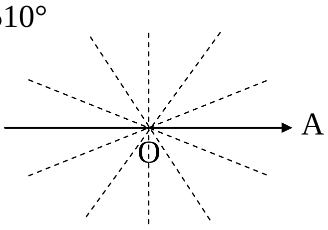
第一象限角　第二象限角　第三象限角　第四象限角

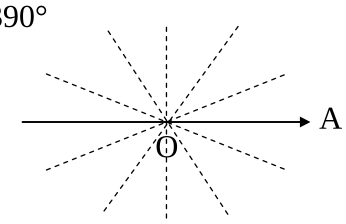
(2)軸上角：廣義角的終邊落在 x 軸或 y 軸上，稱為象限角(或象限角)



例 1.1：在平面上，以 OA 為始邊，畫出角度 510°與－390°的角。

(1) 510°　　　　(2)－390°





例 1.2：下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角或軸上角？

(1)－100°　(2) 120°　(3)－180°　(4) 90°

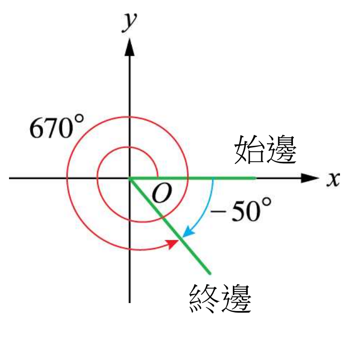
重點 2：同界角

1.意義：當兩個廣義角 θ 與 ϕ 有相同的**始邊**與**終邊**時，稱為 θ 與 ϕ 互為同界角

2.性質：

(1)任意兩同界角的度數相差 360°的**整數倍**　背
即若 θ 與 ϕ 為兩同界角，則 $\theta-\phi=360°\cdot k$，k 為整數

(2)任意一廣義角有**無限多個**(正；負)的同界角，其中
最小正同界角：正同界角中最小的角，其範圍為 0° ≤ 最小正同界角＜360°
最大負同界角：負同界角中最大的角，其範圍為－360° ≤ 最大負同界角＜0°



例 2.1：下列何者是 105°的同界角？

(1) 75°　　(2)－105°　　(3) 465°　　(4)－255°

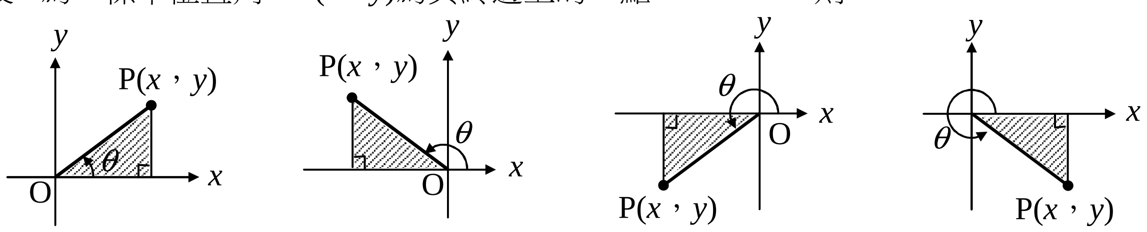
例 2.2：試求下列廣義角的同界角 θ ，且 $0° \le \theta < 360°$ (最小正同界角)

(1) 1000°　　(2)－200°

重點 3：廣義角(象限內)的三角函數值

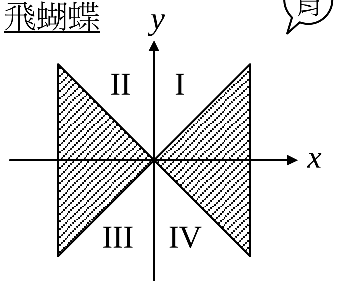
1.廣義角 θ 在各象限內之直角三角形：背

設 θ 為一標準位置角，$P(x，y)$為其終邊上的一點，$\overline{OP}=r$，則：



第一象限角　第二象限角　第三象限角　第四象限角

飛蝴蝶　背



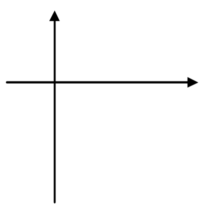
2.廣義角 θ 的三角函數值求法：

(1)先求得第□象限角，在此象限內做出直角三角形並決定該廣義角的邊角關係

(2)再根據三角函數的定義求得其三角函數值

註：同界角的三角函數值**相等**

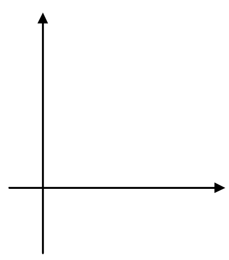
例 3.1：設 θ 為一標準位置角，$A(-2，-1)$是 θ 終邊上一點，試求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的值。



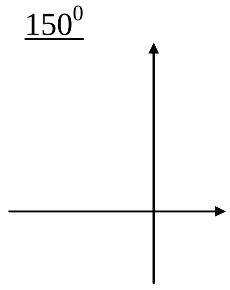
例 3.2：試求下列各 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 值：

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
150°			
300°			

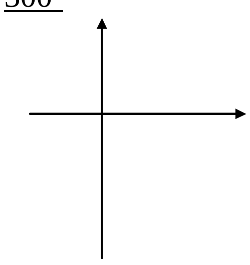
30^0



150^0



300^0

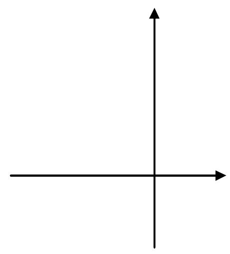


※同界角的三角函數值相等

例 3.3：求 120°和－240°的 sin，cos 和 tan 值。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
120°			
－240°			

$\theta=$

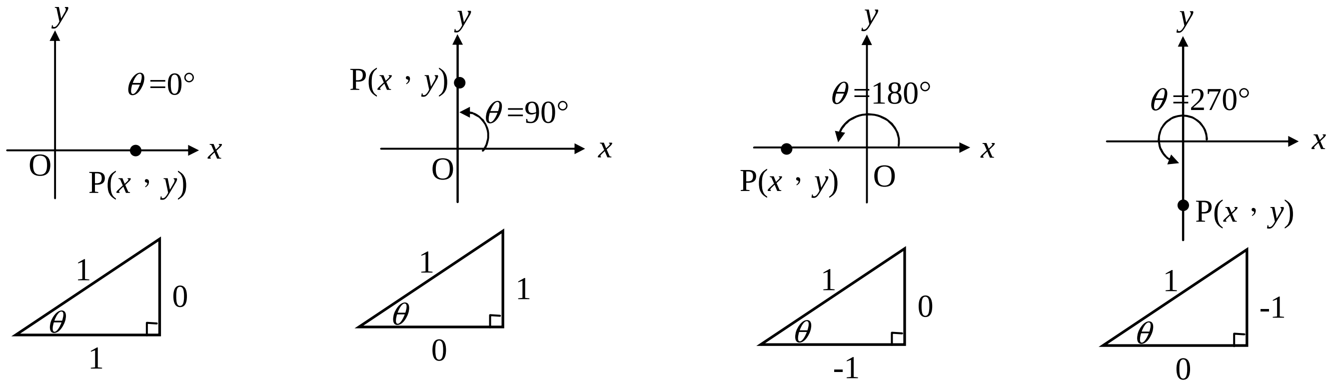


重點 4：廣義角軸上角(象限角)的三角函數值

廣義角 θ 在軸上角(象限角)之直角三角形的邊角關係：

設 θ 為一標準位置角，P(x，y)為 x 軸、或 y 軸上的一點，令 $\overline{OP}=r=1$，則：

θ=0°　　　θ=90°　　　θ=180°　　　θ=270°

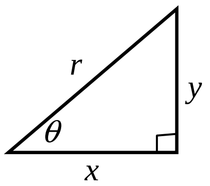


例 4.1：試求下列各 sinθ，cosθ，tanθ 值：(沒有定義時，以 X 表示)

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°			
90°			
180°			
270°			

重點 5：廣義角的三角函數值之正負

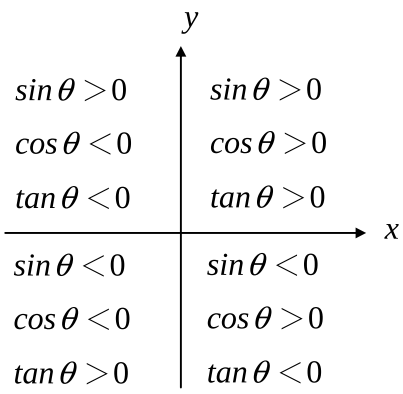
設 θ 為一標準位置角，P(x，y)為 x 軸、或 y 軸上的一點，令 $\overline{OP}=r$，則：



$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\Rightarrow$ $\sin\theta$ 的正負由_____決定

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\Rightarrow$ $\cos\theta$ 的正負由_____決定

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\Rightarrow$ $\tan\theta$ 的正負由_____決定



例5.1：判斷各象限中三角函數值的正負情形，並完成下列表格：

θ終邊所在象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$(x，y)$				
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

例 5.2：根據下列各條件，分別指出各 θ 角是第幾象限角？

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$ (2) $\tan\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$

例 5.3：已知 $\cos\theta=\frac{5}{13}$ 且 θ 是第四象限角，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值。

例 5.4：若 $0°\leqq\theta<360°$，且 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，試求 θ。

重點 6：廣義角三角函數的性質

1.商數關係：當角 θ 的終邊不在 y 軸上時，則 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2.平方關係：對於任意角 θ，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3.單位圓上任意點 P 的坐標為 $P(\cos\theta，\sin\theta)$

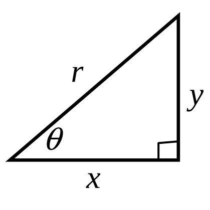
4.奇偶函數：

(1)廣義角三角函數中，$\sin\theta$、$\tan\theta$ 為奇函數，$\cos\theta$ 為偶函數

(2)性質：(負角關係)

奇函數 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$、$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

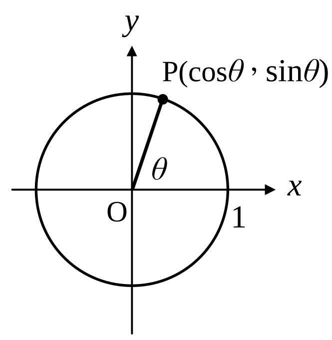
偶函數 $\cos(-\theta)=\cos\theta$



$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$



	θ	$-\theta$
sin	$\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$\tan\theta$	$-\tan\theta$

例 6.1：在空格內填入適當的符號(＋，－)。

(1) $\sin(-45°)=$____$\sin 45°=$____

(2) $\cos(-30°)=$____$\cos 30°=$____

(3) $\tan(-60°)=$____$\tan 60°=$____

重點 7：水平軸廣義角 $0°\pm\theta$，$180°\pm\theta$(補角)與鉛直軸 $0°\pm\theta$(餘角)，$270°\pm\theta$ 的三角函數值

1.意義：(1)**水平軸**廣義角 $0°\pm\theta$ 與 $180°\pm\theta$ 的三角函數**不變**，正負以所在象限的函數判斷

(2)**鉛直軸**廣義角 $90°\pm\theta$ 與 $270°\pm\theta$ 的三角函數**變(互餘)**，正負以所在象限的函數判斷

2.**水平軸**廣義角性質：

(1) $0°+\theta$ 為第一象限角，$\sin(0°+\theta)=\sin\theta$，$\cos(0°+\theta)=\cos\theta$，$\tan(0°+\theta)=\tan\theta$

(2) $0°-\theta$ 為第四象限角，$\sin(0°-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(0°-\theta)=\cos\theta$，$\tan(0°-\theta)=-\tan\theta$

(3) $180°+\theta$ 為第三象限角，$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$，$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$，$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$

(4) $180°-\theta$ 為第二象限角，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$，$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$，$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

3.**鉛直軸**廣義角性質：($\tan\theta$ 暫不討論)

(1) $90°+\theta$ 為第二象限角，$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

(2) $90°-\theta$ 為第一象限角，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

(3) $270°+\theta$ 為第四象限角，$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$，$\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

(4) $270°-\theta$ 為第三象限角，$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$，$\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

	$0°+\theta$	$0°-\theta$	$180°+\theta$	$180°-\theta$	$90°+\theta$	$90°-\theta$	$270°+\theta$	$270°-\theta$
象限(x，y)								
sin								
cos								
tan								

例 7.1：求下列各三角函數值：

(1) $\sin 150°$　(2) $\cos 210°$　(3) $\tan(-60°)$　(4) $\tan(-225°)$

例 7.2：(1)已知 $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，試求 $\sin 105°$ 的值。

(2)已知 $\cos(180°-\theta)=\dfrac{2}{3}$，試求 $\cos\theta$ 的值。

(3)已知 $\tan\theta=3$，試求 $\tan(180°-\theta)$的值。

例 7.3：下列何者與 $\sin 100°$ 的值相同？

(1) $\cos(-10°)$　(2) $\cos 80°$　(3) $\sin 10°$

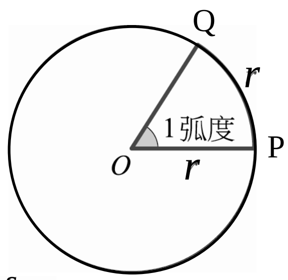
例 7.4：已知 $270°<\theta<360°$ 且 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$，試求下列各值：

(1) $\cos\theta$ (2) $\sin(180°+\theta)$ (3) $\cos(0°-\theta)$

(4) $\sin(270°-\theta)$ (5) $\tan(180°-\theta)$

重點 8：度(°)度量與弧度量(弧度)的關係

前言：衡量一個角的大小除了使用「**角度**」之外，亦可使用「**弧度**」

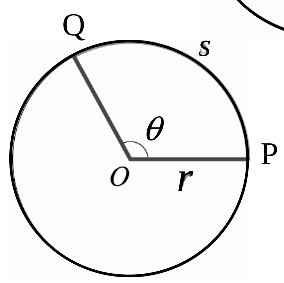


1.弧度定義：弧度量是一種用弧長來表示「**角**」的大小之方法

設圓 O 的半徑為 r，在圓周上取一段弧 PQ，使得圓弧 PQ 的弧長等於 r，如右圖

則規定弧 PQ 所對的圓心角 $\angle POQ$ 的大小為 1 弧度

註：$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 弧度＝60°，常把「弧度」兩字省略不寫



2.弧長與弧度

設圓 O 的半徑為 r，弧長 PQ 為 s，如右圖

則圓弧 s 所對圓心角的弧度數 θ 為弧長 s 與半徑 r 的比值 $\dfrac{s}{r}$，即 $\theta=\dfrac{s}{r}$

3.關係：

圓的弧長(圓周長)為 $2\pi r$，其所對的圓心角為 $\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi=360°$，$\Rightarrow$ $\boxed{\pi\text{ 弧度}=180°}$ 圓周率 $\pi\approx3.14159$

即 $\boxed{1\text{ 度}=\dfrac{\pi}{180^0}\text{ 弧度}}$

$\boxed{1\text{ 弧度}=\dfrac{180}{\pi}\text{ 度}}\approx\left(\dfrac{180}{3.14159}\right)^{\circ}\approx57.2958°$ 弧度

$\boxed{\underline{\text{關係式}}：\dfrac{\text{度}}{180^0}=\dfrac{\text{弧度}}{\pi}}$

例 8.1：將下列角度換為弧度，或將弧度換為角度：

(1) 30° (2) −135° (3) $\dfrac{2}{3}\pi$ (4) $-\dfrac{\pi}{12}$ (5) 4

例 8.2：試求下列三角函數的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\cos\dfrac{5}{4}\pi$

重點 9：直角坐標與極坐標

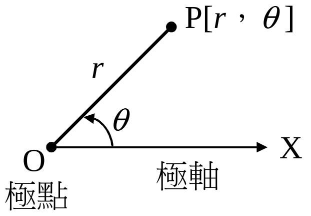
1.極坐標定義：

(1)若在平面上選定一點 O (稱為原點或極點，簡稱極)，以 O 為端點向右作一水平射線 OX (稱為極軸，簡稱軸) 則稱為極坐標。

(2)對於平面上異於 O 的任一點 P，如右圖

設 $\overline{OP}=r>0$，且若以極軸為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角度數為 θ，$0°\le\theta<360°$

則用符號 P[r，θ]表示 P 點的位置，[r，θ]稱為 P 點的一個極坐標



註：(1)極點 O 的極坐標為[0，θ]，其中 θ 為任意角

(2)因為同界角具有相同的始邊與終邊，所以極坐標的**表示法並不唯一**

2.直角坐標與極坐標的轉換：

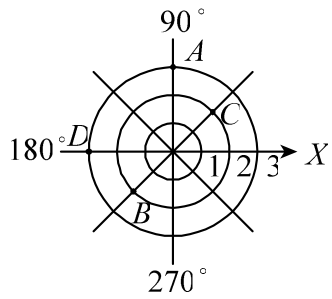
已知平面上異於原點的點 P，則 P(x，y) ≡ P[r，θ]

(1)若已知直角坐標點 P(x，y)，則極坐標為 P [r，θ]，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

(2)若已知極坐標點 P[r，θ]，則直角坐標為 P(x，y)，其中 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

註：直角坐標與極坐標的轉換亦可利用廣義角做轉換

例 9.1：寫出右圖中 A，B 兩點的極坐標。



例 9.2：(1)已知 P 點的極坐標為[4，120°]，試求 P 點的直角坐標

(2)已知 Q 點的直角坐標為(-2，-2)，試求 Q 點的極坐標