1.1 直角三角形的邊角關係　　　　二年____班　座號：____　姓名：

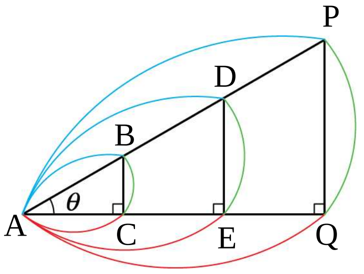
重點 1：直角三角形邊的比例

意義：兩相似的三角形，其三邊長的比例是**固定的**，不因三角形的大小不同而改變

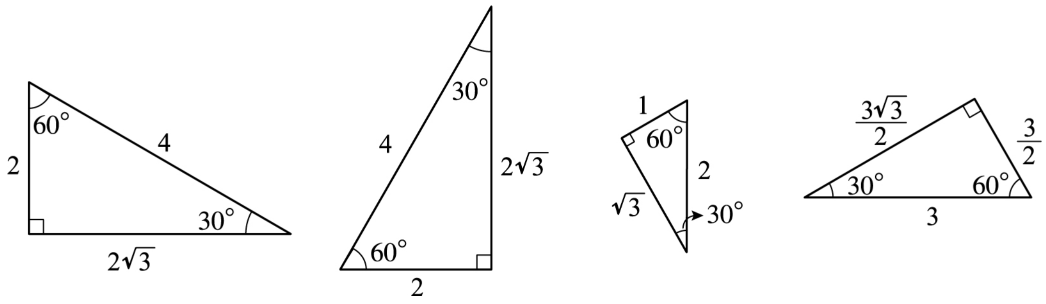
註：(1)若△ABC ~ △A′B′C′，則對應邊成比例，對應角相等

(2)如右圖，相似的三角形△ABC ~ △ADE ~ △APQ 中，

邊長的比例和三角形的大小無關，只和銳角 θ (讀做 *theta*)的大小有關



例 1.1：試觀察下列大小不同的 30°－60°－90°直角三角形：



(1)根據________性質，上列直角三角形皆相似，其三邊長的比都是________

(2)試求下列各比值：

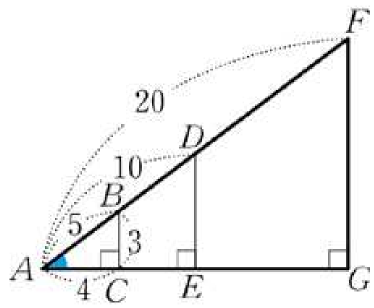
(A) $\dfrac{30^\circ\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}=$______　(B) $\dfrac{30^\circ\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=$______　(C) $\dfrac{30^\circ\text{的對邊長}}{30^\circ\text{的鄰邊長}}=$______

例 1.2：右圖中，△ABC，△ADE，△AFG 皆為相似的直角三角形，試以「最簡分數」填入下列各空格：

(1) ∠A 的$\dfrac{\text{對邊長}}{\text{斜邊長}}$比例：$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\boxed{}$，$\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AF}}=\boxed{}$

(2) ∠A 的$\dfrac{\text{鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$比例：$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\boxed{}$，$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AF}}=\boxed{}$

(3) ∠A 的$\dfrac{\text{對邊長}}{\text{鄰邊長}}$比例：$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\boxed{}$，$\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AG}}=\boxed{}$



重點 2：銳角三角函數

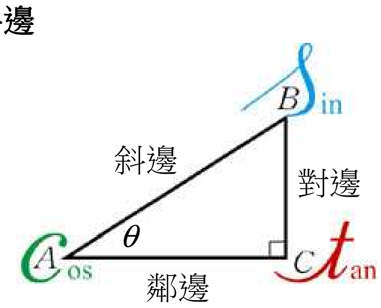
1.定義：直角△ABC 中，設$\angle C=90^\circ$，如右圖

對∠A 而言，$\overline{BC}$ 稱作$\angle A$ 的**對邊**，$\overline{AC}$ 稱作$\angle A$ 的**鄰邊**，$\overline{AB}$ 稱作$\angle A$ 的**斜邊**

(1)∠A 的**正弦**函數(sine A)，$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

(2)∠A 的**餘弦**函數(cosine A)，$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

(3)∠A 的**正切**函數(tangent A)，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



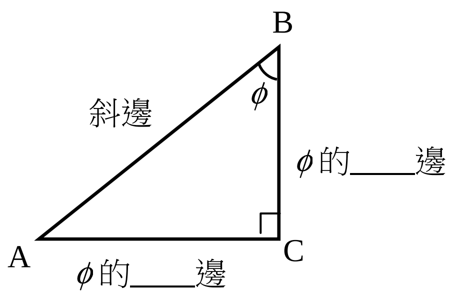
2.性質：(1)以θ表示任一銳角時，則三角函數表為 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$

(2)銳角θ的 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 皆為兩邊長的比值，為**不具單位**的正數

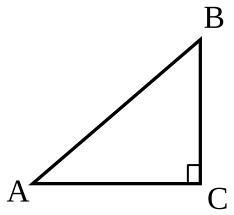
(3) $\angle A$ 為銳角時，$0<\sin A<1$ 且 $0<\cos A<1$，$\tan A>0$

註：如右圖，設∠B＝ϕ，則 $\overline{BC}$ 稱作∠B 的_____**邊**，$\overline{AC}$ 稱作$\angle B$ 的_____**邊**

$\Rightarrow \sin\phi=\boxed{}$　$\cos\phi=\boxed{}$　$\tan\phi=\boxed{}$



例 2.1：設直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，三邊長 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，試求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 的值。



例 2.2：已知$\angle$A 為銳角且 $\sin A=\frac{2}{3}$，求 $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值。

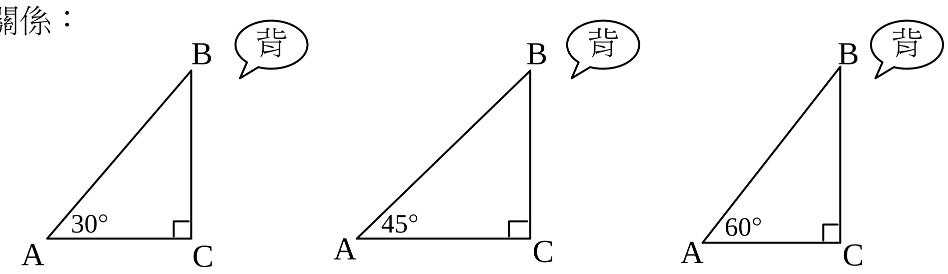
例 2.3：若θ 是一個銳角且 $\tan\theta=2$，求 $\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 的值。

例 2.4：直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，斜邊 $\overline{AB}=12$，$\sin A=\frac{3}{4}$，試求 $\overline{BC}$ 邊長。

重點 3：特別角的銳角三角函數

1.意義：30°，45°，60°三個常用角度，稱為銳角特別角

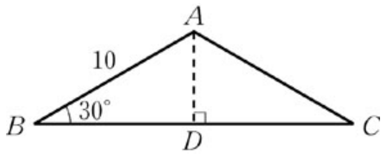
2.特別角的邊角關係：



例 3.1：試完成下表：

三角函數 \ θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

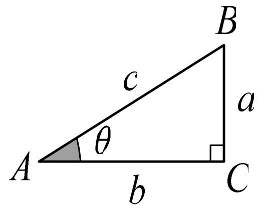
例 3.2：有一等腰三角形，頂角為 120°，腰長為 10，求此等腰三角形的面積。



重點 4：銳角三角函數的基本關係

1.觀念：在直角△ABC 中，$\angle C$ 為直角，若 $\angle A=\theta$，且以 a，b，c 分別表示∠A，∠B，∠C 的對邊長，如下圖

則 $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$



2.基本關係：$0°<\theta<90°$

(1)商數關係式：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 背

(2)平方關係式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(3)餘角關係式：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

例 4.1：利用商數關係式與平方關係式，完成下列空格：

(1) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 18°}=$________　　(2) $\tan 20°\cdot\cos 20°=$_______

例 4.2：試求下列各值：

(1) $\sin^2 37°+\cos^2 37°$　　(2) $1-\cos^2 30°$

例 4.3：請在空格內填入適當角度：

(1) $\sin 36°=\sin(90°-\quad)=\cos(\quad)$　　(2) $\cos 23°=\cos(90°-\quad)=\sin(\quad)$

例 4.4：已知 $0°<\theta<90°$，且 $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，試求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值。

重點 5：三角函數的基本性質

1. $\underline{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1+2\sin\theta\cos\theta}$

   $\underline{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1-2\sin\theta\cos\theta}$

2. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

3. $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

4. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

5. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

例 5.1：已知 $0°<\theta<90°$，試證：

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　(2) $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

例 5.2：已知 $0°<\theta<90°$，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta+\cos\theta$　(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

例 5.3：設 θ 為銳角，$\sin\theta=k$，試用 k 表出 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$。

重點 6：銳角三角函數值之遞增、遞減

性質：當角度由 0°增大為 90°時：

(1)正弦函數值由 sin0°遞增為 sin90°，亦即函數值由 0 遞增為 1

(2)餘弦函數值由 cos0°遞減為 cos90°，亦即函數值由 1 遞減為 0

(3)正切函數值由 tan0°遞增至 tan45°，再增為 tan90°，亦即函數值由 0 遞增至 1，再增為∞(無限大)

例 6.1：試比較下列各組函數值之大小關係：

(1) sin 50°____sin 40°　(2) cos 50°____cos 40°　(3) sin 50°____cos 50°

(4) sin 70°____ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(5) cos 70°____ $\dfrac{1}{2}$