

## Ch 3.1 比例式

**重點 1：比與比值**

1.比：兩個數  $a$ 、 $b$  的比記為  $a:b$ ，讀作  $a$  比  $b$ ，其中  $a$  稱為比的**前項**， $b$  稱為比的**後項**

2.比值：在  $a:b$  中，若  $b \neq 0$ ，則  $a:b$  的比值為  $a \div b = \frac{a}{b}$

註： $a$ 、 $b$  的比與比值表示法不同，當後項  $b \neq 0$  時，可表示為比值形式，且其比值**沒有單位**

3.性質：

若甲與乙的比為  $a:b$ ， $b \neq 0$ ，則：

(1)甲：乙的比值為  $\frac{a}{b}$ ，意即甲是乙的  $\frac{a}{b}$  倍

(2)若甲是乙的  $\frac{a}{b}$  倍，得知甲：乙 =  $a:b$

例 1.1：右圖是製作 12 個粽子的食譜，根據右圖回答下列問題：

(1)製作 12 個粽子所需的調味料中：

沙拉油重量：醬油重量 = \_\_\_\_\_：\_\_\_\_\_，比值為\_\_\_\_\_

(2)沙拉油重量是醬油重量的\_\_\_\_\_倍

(3)醬油重量是沙拉油重量的\_\_\_\_\_倍

**製作 12 個粽子**

粽子



米飯	調味料
長糯米 600 公克	沙拉油 15 公克
高湯 120 公克	鹽 3 公克
	醬油 6 公克

**其他**

鹹蛋黃、蝦米、滷香菇、杏鮑菇、滷豬肉、素火腿、花生適量

Ex1.1：英國皇家鑄幣局所發行的 2012 倫敦奧運紀念銀幣中，

是由銀和銅依重量 37：3 的比例所合成的，

則這種銀幣中，銀的重量是銅重量的\_\_\_\_\_倍



Ex1.12：小妍常去的歐風麵包坊裡有可頌和菠蘿兩種招牌麵包，已知一個可頌的價錢是一個菠蘿價錢

的  $\frac{2}{7}$  倍，則每個可頌和菠蘿價錢的比為何？

例 1.2：棒球比賽中，選手的安打數與總打擊數的比值，以百分率表示稱為「打擊率」。某職棒選手在最近上場打擊 30 次中，共揮出 12 支安打，則：

(1) 該選手的打擊率為多少？(打擊率 = 兩個數比的比值乘以 100%)

(2) 後來該選手又多出場打擊 10 次，如果要維持原有的打擊率，他必須在這 10 次打擊中擊出幾支安打？

Ex1.2：一場籃球比賽中，選手的投進球數和總投球數的比值，以百分率表示稱為「命中率」。在某次投籃比賽中，小翊共投進 21 球，命中率為 7 成，則他的總投球數為多少？

(註：命中率 = 兩個數比的比值乘以 100%)

### 重點 2：比值的計算

1. 繁分數：當一個分數的分子或分母也是分數時，就稱為繁分數

2. 繁分數化簡：繁分數的值就是將分子除以分母後所得到的值，可分為下列三型式：

$$(1) \frac{\frac{d}{b}}{a} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$(2) \frac{\frac{c}{b}}{\frac{1}{a}} = \frac{a \times c}{1 \times b} = \frac{a \times c}{b}$$

$$(3) \frac{\frac{c}{b}}{a} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{1}{1}} = \frac{1 \times c}{a \times b} = \frac{c}{a \times b}$$

註：繁分數化簡也可以對分子、分母同乘以原數的最小公倍數，如  $\frac{\frac{d}{b}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{d}{b} \times ac}{\frac{1}{a} \times ac} = \frac{a \times d}{b \times c}$

註： $a : b$ ，( $b \neq 0$ )的比值為  $a \div b = \frac{a}{b}$ ，可利用繁分數化簡方式計算

例 2.1：將下列各數化簡成最簡分數：

$$(1) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$(3) \frac{\frac{4}{5}}{6}$$

Ex2.1：將下列各數化簡成最簡分數：

$$(1) \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{-\frac{8}{1}}}$$

$$(2) \frac{\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}}$$

$$(3) \frac{-4}{\frac{6}{7}}$$

$$(4) \frac{\frac{7}{12}}{\frac{15}{15}}$$

例 2.2：寫出下列各比的比值(以最簡分數表示)：

$$(1) 2 : 3 \quad (2) \frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) \quad (3) 0.7 : 1.3$$

Ex2.2：寫出下列各比的比值(以最簡分數表示)：

$$(1) 24 : (-12) \quad (2) \left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3} \quad (3) (-0.3) : 2.4$$

### 重點 3：比的運算

1.相等的比：當幾個比的比值相等時，就稱這幾個比是相等的比

2.比的運算性質：

(1)當  $m \neq 0$  時，則  $a : b = (a \times m) : (b \times m)$  (相當於擴分運算)

(2)當  $m \neq 0$  時，則  $a : b = (a \div m) : (b \div m) = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$  (相當於約分運算)

3.最簡整數比：

當  $a$ 、 $b$  都是整數，且它們的最大公因數是 1 (即  $(a, b) = 1$ ) 時，稱  $a : b$  是最簡整數比。

而此時他們的比值  $\frac{b}{a}$  會是最簡分數。

例 3.1：在下列各□內填入適當的數值：

$$(1) 4 : 18 = 2 : \square \quad (2) 2 : (-7) = (-12) : \square \quad (3) (-2) : 9 = \square : 4$$

Ex3.1：在下列各□內填入適當的數值：

(1)  $(-15) : 20 = 3 : \square$

(2)  $(-6) : (-14) = \square : 7$

(3)  $36 : (-28) = (-3) : \square$

例 3.2：將下列各比以最簡整數比表示：

(1)  $13 : 6$

(2)  $14 : 35$

(3)  $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

Ex3.2：將下列各比以最簡整數比表示：

(1)  $24 : (-16)$

(2)  $(-\frac{7}{5}) : (-\frac{21}{20})$

(3)  $(-1.2) : \frac{5}{6}$

例 3.3：下列四個選項中，哪兩項的比值相等？

(A)  $30 : 50$

(B)  $33 : 55$

(C)  $60 : 36$

(D)  $40 : 50$

#### 重點 4：比例式

1. 意義：

若兩個比  $a : b$  與  $c : d$  的比值相同，即  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則稱  $a : b$  和  $c : d$  相等，寫成  $a : b = c : d$

此等式  $a : b = c : d$  稱為比例式；其中  $b$  和  $c$  稱為比例式的內項， $a$  和  $d$  稱為比例式的外項

2. 比例式運算性質：

(1) 外項乘積 = 內項乘積：即若  $a : b = c : d$ ，則  $ad = bc$

(2) 假設式：若  $x : y = a : b$  有意義，即  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ，則存在  $k \neq 0$ ，使得  $\begin{cases} x = ak \\ y = bk \end{cases}$

例 4.1：試求下列各比例式中的  $x$  值：

(1)  $8 : 9 = 14 : x$

(2)  $(x-2) : 6 = (x+8) : 8$

Ex4.1：試求下列各比例式中的  $x$  值：

$$(1) 5 : x = 4 : 9$$

$$(2) 3 : 8 = x : \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{x}{3} : 7 = 2 : \frac{3}{2}$$

$$(4) 8 : \frac{5}{2}x = 4 : 5$$

Ex4.12：試求下列各比例式中的  $x$  值：

$$(1) \frac{3}{2} : \frac{2x}{3} = 1 : 8$$

$$(2) (2x+1) : (x-3) = (-3) : 1$$

例 4.2：設有兩數  $x$ 、 $y$ ，已知  $x : y = 3 : 2$ ，且  $x + y = 20$ ，則  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

Ex4.2：有兩數  $x$ 、 $y$ ，已知  $x : y = 5 : 7$ ，且  $x - y = 30$ ，則  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

例 4.3：設  $x$ 、 $y$  皆不為 0，且  $7x = 4y$ ，試求下列各比的比值：

$$(1) x : y$$

$$(2) 2x : 3y$$

$$(3) (2x+3y) : (4x-y)$$

Ex4.3：設  $x$ 、 $y$  皆不為 0，且  $3x=5y$ ，試求下列各式之比：

(1)  $x : y$

(2)  $7x : 3y$

(3)  $(7x-3y) : (4x+2y)$

例 4.4：設  $(a+b) : (a-b) = 3 : (-2)$ ，計算下列各式：

(1)  $a : b = \underline{\quad} : \underline{\quad}$

(2)  $b : (a-b)$  的比值為  $\underline{\quad}$

Ex4.4：設  $(a+b) : (a-b) = (-5) : 4$ ，試計算  $\frac{a+3b}{a-3b}$  之值

例 4.5：設  $x : y = 7 : 3$ ，且  $y \neq 1$ ，則：

(1) 當  $x=7$  時， $y = \underline{\quad}$ ，得知  $(x-1) : (y-1)$  的比值為  $\underline{\quad}$

(2) 當  $x=14$  時， $y = \underline{\quad}$ ，得知  $(x-1) : (y-1)$  的比值為  $\underline{\quad}$

(3) 由(1)、(2)，得知  $(x-1) : (y-1)$  的比值是否為定值？答：  $\underline{\quad}$

Ex4.5：設  $x : y = 2 : 5$ ，且  $y \neq -1$ ，則：

- (1) 當  $x=4$  時， $y=$  \_\_\_\_\_，得知  $(x+1) : (y+1)$  的比值為 \_\_\_\_\_
- (2) 當  $x=10$  時， $y=$  \_\_\_\_\_，得知  $(x+1) : (y+1)$  的比值為 \_\_\_\_\_
- (3) 由(1)、(2)，得知  $(x+1) : (y+1)$  的比值是否為定值？答： \_\_\_\_\_

### 重點 5：應用問題

1. 意義：比與比值、比例式在生活中的應用非常廣泛
2. 設圓的半徑為  $r$ ，

(1) 圓周率為圓周長：直徑的比值  $= \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} = \pi \approx 3.14$ ， $\pi$  讀作 ㄆㄧ，是一個無限小數

(2) 圓周長 = 直徑  $\times$  圓周率  $= 2 \times r \times \pi = 2\pi r$

圓面積 = 半徑  $\times$  半徑  $\times$  圓周率  $= r \times r \times \pi = \pi r^2$

3. 食鹽水的濃度(重量百分濃度，簡稱為濃度)：

水中加入食鹽，溶解後得到食鹽水，則食鹽水的濃度  $= \frac{\text{食鹽的重量}}{\text{食鹽水的重量}} \times 100\%$

例 5.1：小翊和小靖各有一些零用錢，且小翊零用錢的 2 倍和小靖零用錢的 3 倍一樣多，則：

- (1) 小翊的零用錢：小靖的零用錢 = \_\_\_\_\_：\_\_\_\_\_
- (2) 承(1)，若小翊的零用錢和小靖的零用錢共有 500 元，則小翊和小靖的零用錢各有多少元？

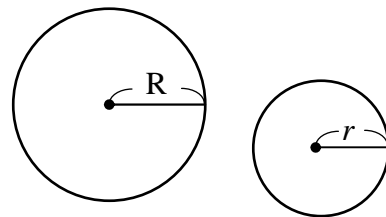
Ex5.1：籃子裡有一些蘋果和梨子，若蘋果個數的 5 倍等於梨子個數的 4 倍，且蘋果比梨子少 21 個，則蘋果和梨子各有多少個？

例 5.2：小妍和小翊兩人原有音樂 CD 的張數比為  $6:5$ ，後來兩人分別又買了 5 張和 3 張音樂 CD，結果張數比變為  $5:4$ 。則兩人原本各有幾張音樂 CD？

Ex5.2：公園裡原有男生、女生人數比為  $8:7$ ，後來有 3 位男生和 6 位女生走出公園，剩下的男生、女生人數比變為  $5:4$ 。則公園裡原有男生、女生各多少人？

例 5.3：如右圖，兩圓的圓心相同，且大圓的半徑為  $R$ ，小圓的半徑為  $r$ ，已知  $R:r=9:7$ ，則：

- (1) 兩圓面積的比值為多少？
- (2) 大圓面積是小圓面積的幾倍？
- (3) 兩圓面積的比與它們的半徑關係為何？



Ex5.3：若已知大、小兩圓的半徑比為  $5:2$ ，則：

- (1) 大、小兩圓的圓周長比為何？
- (2) 大、小兩圓的圓面積比為何？
- (3) 大圓面積是小圓面積的多少倍？



例 5.4：將一條 80 公分的繩子以 3：5 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則這兩個正方形面積的比值為多少？

Ex5.4：將一條 90 公分的繩子以 4：5 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形比大正方形的周長比值與面積的比值各是多少？

例 5.5：在 195 公克的水中，加入 5 公克的食鹽，溶解後得到食鹽水溶液，則這杯食鹽水溶液的濃度是多少？

Ex5.5：在水中加入砂糖溶解後得到糖水，其中糖水的濃度 =  $\frac{\text{糖的重量}}{\text{糖水的重量}} \times 100\%$

若有一杯糖水 160 公克，內含 20 公克的糖，則這杯糖水的濃度是多少？