

Ch 1.2 解二元一次方程式

重點 1：二元一次式方程式

1. 意義：將兩個二元一次方程式並列，來表達題目中的數量關係，如 $\begin{cases} 3x + y = 700 \\ 5x + 2y = 1200 \end{cases}$ 的形式

就稱其為二元一次**聯立方程式**或二元一次**方程組**

2. 二元一次聯立方程式的解：

能同時讓兩個二元一次方程式等號成立的 x 、 y 值，稱 x 、 y 為此兩個方程式的一組共同解，也就是此二元一次聯立方程式的解

例 1.1：下列各組數中，哪一組是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x = -1$ 、 $y = 2$

(2) $x = 3$ 、 $y = 3$

(3) $x = 2$ 、 $y = 1$

Ex1.1：下列各組數中，哪一組是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x = 2$ 、 $y = 1$

(2) $x = 2$ 、 $y = -1$

(3) $x = 1$ 、 $y = -2$

重點 2：解聯立方程式—代入消去法

1. 意義：求出二元一次聯立方程式的解的過程，稱為**解聯立方程式**

註：可以利用「代入消去法」或「加減消去法」解二元一次聯立方程式

2. 代入消去法：(先分別將方程式標上序號)

第一步：將其中一個方程式，變成一元一次方程式，並解之

第二步：將解代入方程式(消去此未知數)求另一個未知數

註：聯立方程式的解是**共同解**，解出其中一個未知數之後，不論代回哪個式子，都可求出相同的另一個未知數

第三步：驗算。(可省略)

例 2.1：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 27 \end{cases}$

Ex2.1：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x = 4y \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ y = -2x \end{cases}$

例 2.2：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y = 3 - 9x \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

Ex2.2：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 2x + 5y = 36 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -2x + 1 = y \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$

例 2.3：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ 5x - y = 16 \end{cases}$

Ex2.3：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ -3x + 5y = 11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$

例 2.4：解二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} 2y = 4x - 3 \\ 5x + 4y = 20 \end{cases}$$

Ex2.4：解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3y = 7x - 15 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3y = 7x - 15 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x = 2y + 13 \\ 6x - 11y = -2 \end{cases}$$

重點 3：解聯立方程式—加減消去法

1. 意義：將兩個二元一次方程式相加或相減，恰可削去其中一個未知數，使原聯立方程式簡化為一元一次方程式，再求其解的過程，稱為加減消去法

2. 加減消去法：

第一步：將兩個方程式直接相加(或相減，或乘以某倍數後再相加、相減)可以消去其中一個未知數，成為一個一元一次方程式，再利用解一元一次方程式的解法，求得一未知數的解

第二步：將解代回，再求得另一個未知數的解

註：優先削去低倍數之未知數

例 3.1：解二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$$

Ex3.1：解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ -3x + y = -9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -5x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

例 3.2：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

Ex3.2：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 4x + 3y = -5 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x - 8 = 3y \\ -5x + 11 = -6y \end{cases}$

例 3.3：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

Ex3.3：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 2x + 5y = -10 \\ 5x - 3y = 6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x - 6y + 4 = 0 \\ 3x + 4y - 9 = 0 \end{cases}$

例 3.4：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x = -1 + 2x - 2y \\ 3x - 2y - 13 = 0 \end{cases}$

Ex3.4：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 2x - 2 = 3y - 3x \\ 3x + 2y - 22 = 2x - y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x + 2 = -4y + 4x \\ -x + 2y - 5 = -4x + y \end{cases}$

例 3.5：解二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{3x}{2} + y = 3 \end{cases}$$

Ex3.5：解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{17}{6} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 0.3x - 0.2y = 2.5 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$$

例 3.6：若
$$\begin{cases} \frac{1}{6}x + 6y = 40 \\ 6x + \frac{1}{6}y = 145 \end{cases}$$
，則 $x - y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(x、y 的係數對稱，則兩式相加、減)

Ex3.6：若 $x = a$ 、 $y = b$ 是二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} 67x + 32y = -131 \\ 32x + 67y = -166 \end{cases}$$
 的解，則 $2a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

重點 4：聯立方程式的解

意義：若 (x, y) 為聯立方程式的一組解，則 (x, y) 皆滿足聯立方程組的任一個方程式

例 4.1：已知 $\begin{cases} ax - 2by = -2 \\ 2ax - by = 8 \end{cases}$ 的解為 $x=2$ 、 $y=1$ ，試求 a 與 b 的解。

Ex4.1：若 $\begin{cases} ax + by = 5 \\ ax - by = 7 \end{cases}$ 的解為 $x=3$ 、 $y=-1$ ，試求 $a+b=?$

重點 5：二元一次聯立方程式的應用

意義：利用代入消去法、加減消去法的法則，求解各種聯立方程組的解

例 5.1：若 $|3x+y-5| + |2x-3y-7| = 0$ ，試求 x 、 y 的值。

Ex5.1：若 $|4x-y-12| + 3|x-4y+27| = 0$ ，試求 x 、 y 的值。

例 5.2：若 $-3x-2y=x-y=5$ ，求 x 、 y 的值。

Ex5.2：若 $3x+y-12=-2x-4y-7=-1$ ，求 x 、 y 的值。

重點 6：二元一次聯立方程式解的情形

1. 意義：二元一次聯立方程式解的情形可能是**恰有一組解**、**有無限多組解**或**無解**

2. 解的判斷：

考慮聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 解的情形如下：

(1) 若 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ，則此聯立方程式「恰有一組解」

(2) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ，則此聯立方程式「有無限多組解」

(3) 若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ，則此聯立方程式「無解」

◎無限多組解

例 6.1：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

Ex6.1：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

◎無解

例 6.2：解二元一次聯立方程 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

Ex6.2：解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

例 6.3：判斷下列各二元一次聯立方程式解的情形：

$$(A) \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 31 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} -5x + 3y = 7 \\ 10x - 6y = 8 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$(E) \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 2 \\ 5x - 3y = 30 \end{cases}$$

$$(F) \begin{cases} -3x + y = 1 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

(1) 恰有一組解的為_____

(2) 有無限多組解的為_____

(3) 無解的為_____

Ex6.3：判斷下列各二元一次聯立方程式解的情形：

$$(A) \begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Ch 1.2 解二元一次方程式 自我評量

1. 下列各組數中，哪一組是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ 的解？【(C)】

(A) $x=1$ 、 $y=2$

(B) $x=\frac{1}{2}$ 、 $y=-2$

(C) $x=2$ 、 $y=-1$

2. 解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x = y - 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y = -16 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 10y = -2x + 8y + 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \frac{x+2y}{2} - \frac{-x+y}{6} = \frac{1}{3} \\ -6x - 4y = -10 \end{cases}$

3. (1) 若 $|5x + 2y - 19| + |x - 4y + 5| = 0$ ，求 x 、 y 的值。

(2) 若 $3x - 2y - 1 = 3y - 2x - 16 = 4$ ，求 x 、 y 的值

4. 若 $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} ax + by = 4 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$ 有相同的解，求 a 、 b 的值。