

## Ch 2.2 最大公因數與最小公倍數

**重點 1：公因數與最大公因數**

1.定義：若某一個整數  $A$  同時是幾個整數的因數時，則稱  $A$  為這幾個整數的**公因數**；而在所有的公因數中最大的數，稱為這幾個數的**最大公因數**

2.表示法：

若  $a, b$  為兩個整數，則以符號  $(a, b)$  表示  $a$  與  $b$  的**最大公因數**

註：利用短除法、質因數分解求二個數等的最大公因數

3.互質：當兩個整數的最大公因數為 1 時，稱這兩個整數**互質**。

即：若  $(a, b) = 1$ ，則稱  $a$  與  $b$  互質

註：同理：若  $(a, b, c) = 1$ ，則稱  $a, b$  與  $c$  三個數互質

4.性質：

(1)最大公因數一定是正數

(2)所有的公因數一定是最大公因數的因數

(3)若  $(a, b) = 1$ ，表示  $a$  與  $b$  互質，但是  $a$  與  $b$  這兩個數不一定是質數

如  $(12, 35) = 1$ ，但是 12, 35 不是質數

(4)若  $(a, b) = d$ ，則  $a$  與  $b$  都是  $d$  的因數，或稱  $d$  是  $a$  與  $b$  的倍數

(5)求  $a, b$  與  $c$  三個數的最大公因數時，可利用性質  $(a, b, c) = ((a, b), c)$

例 1.1：(1)試分別列出 12 與 18 的因數

(2)承(1)，列出 12 與 18 的公因數

(3)承(2)，以  $(12, 18)$  表示 12 與 18 的最大公因數

解：(1)12 的因數有：

18 的因數有：

(2) 12 與 18 的公因數有：

(3)  $(12, 18) =$

Ex1.1：(1)試分別列出 24 與 32 的因數

(2)承(1)，列出 24 與 32 的公因數

(3)承(2)，以  $(24, 32)$  表示 24 與 32 的最大公因數

例 1.2：利用短除法，求 36 與 84 的最大公因數

Ex1.2：利用短除法，求 126 與 180 的最大公因數

例 1.3：(1)試分別求出 54、72 與 84 的因數，並求出其最大公因數(54，72，84)

(2)利用短除法與性質，求 54、72 與 84 的最大公因數

Ex1.3：利用短除法與性質，求 144、252 與 360 的最大公因數

例 1.4：(1)試分別列出 12 與 35 的因數

(2)承(1)，列出 12 與 35 的公因數

(3)承(2)，以(12，35)表示 12 與 35 的最大公因數，說明 12 與 35 是否互質？

解：(1)12 的因數有：

35 的因數有：

(2) 12 與 35 的公因數有：

(3)  $(12, 35) =$

Ex1.4：試判斷下列各組數是否互質？

(1) 1、9

(2) 7、356

(3) 12、33

(4) 11、979

**重點 2：標準分解式與最大公因數**

1. 定義：任何一合數  $A$  都可以寫成  $A = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \cdots$  形式，稱為  $A$  的標準分解式  
其中  $p_1、p_2、\cdots$  為質數， $a、b、c、\cdots$  為正整數

2. 利用除法來判別因數：

設  $a、b$  為整數，若將  $b$  除以  $a$ ，(即  $\frac{b}{a}$ )，將其  $b$  與  $a$  約分，得結果為整數，則稱  $a$  為  $b$  的因數

反之，若無法約分化簡為整數，則稱  $a$  不為  $b$  的因數

3. 利用標準分解式的指數來判別因數：

當  $A$  和  $B$  兩個整數寫成標準分解式時，若滿足：

(1)  $A$  的質因數都是  $B$  的質因數，且

(2)  $A$  的每個質因數的次數小於或等於  $B$  相同質因數的次數

則  $A$  是  $B$  的因數

4. 利用標準分解式求最大公因數：

當幾個整數做標準分解式時，可以從共同質因數中取次數較小者相乘，即為它們的最大公因數

註：當幾個數做質因數分解，發現這幾個數沒有共同的質因數，則這幾個數的最大公因數就是 1  
意即這幾個數互質

例 2.1：試利用除法，判斷下列各數中，哪些是  $2^3 \times 3^2$  的因數？

- (1)  $2^4$       (2)  $2^2 \times 3^2$       (3)  $2 \times 3^3$       (4)  $2 \times 5$

Ex2.1：試利用除法，判斷下列各數中，哪些是  $2^4 \times 5^2$  的因數？

- (1)  $2^4$       (2)  $2 \times 5^2$       (3)  $2 \times 5^3$       (4)  $2^5 \times 5$

例 2.2：試利用觀察指數方法，判斷下列各數中，哪些是  $2^3 \times 3^2$  的因數？

- (1)  $2^4$       (2)  $2^2 \times 3^2$       (3)  $2 \times 3^3$       (4)  $2 \times 5$

Ex2.2：試利用觀察指數方法，判斷下列各數中，哪些是  $2^4 \times 5^2$  的因數？

- (1)  $2^4$       (2)  $2 \times 5^2$       (3)  $2 \times 5^3$       (4)  $2^5 \times 5$

例 2.3：利用標準分解式，求下列各組數的最大公因數：

(1)  $a = 2^4 \times 3^2$ ， $b = 2^3 \times 3 \times 5$

(2)  $a = 2^4 \times 3^2$ ， $b = 2^3 \times 3 \times 5$ ， $c = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Ex2.3：利用標準分解式，求下列各組數的最大公因數：

(1)  $(2^3 \times 3^2 \times 5, 2 \times 3^3)$

(2)  $(2 \times 5 \times 11, 3 \times 5^2 \times 11, 3^2 \times 5 \times 11^2)$

例 2.3：求下列各組數的最大公因數：

(1)  $a = 2^3 \times 5^2$ ， $b = 3^2 \times 7$

(2)  $a = 2^3 \times 11^2$ ， $b = 3^3 \times 5$ ， $c = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$

Ex2.3：求下列各組數的最大公因數：

(1)  $(3^2 \times 7^3, 2^5 \times 5)$

(2)  $(2^5 \times 5^3, 3^3 \times 7, 2^2 \times 7^4)$

### 重點 3：公倍數與最小公倍數

1. 定義：若某一個整數 A 同時是幾個整數的倍數時，則稱 A 為這幾個整數的公倍數；而在所有的公倍數中最小的數，稱為這幾個數的最小公倍數

2. 表示法：

若  $a, b$  為兩個整數，則以符號  $[a, b]$  表示  $a$  與  $b$  的最小公倍數

註：利用短除法、質因數分解求二個數等的最小公倍數

3. 互質兩數的最小公倍數求法：

若  $a$  與  $b$  互質，即  $(a, b) = 1$ ，則  $[a, b] = ab$

註：若  $(a, b, c) = 1$ ，則  $[a, b, c] = abc$  不一定成立

4. 性質：

(1) 最小公倍數一定是正數

(2) 所有的公倍數一定是最小公倍數的倍數

即若  $[a, b] = d$ ，則  $a$  與  $b$  都是  $d$  的倍數，或稱  $d$  是  $a$  與  $b$  的因數

(3) 求  $a, b$  與  $c$  三個數的最小公倍數時，可利用性質  $[a, b, c] = [[a, b], c]$

- 例 3.1：(1)試分別列出 10 個 4 與 6 的倍數  
(2)承(1)，列出 10 個 4 與 6 的公倍數  
(3)承(2)，以 $[4, 6]$ 表示 4 與 6 的最小公倍數

解：(1) 4 的倍數有：

6 的倍數有：

(2) 4 與 6 的公倍數有：

(3)  $[4, 6]=$

- Ex3.1：(1)試分別列出 6、9 與 12 的倍數  
(2)承(1)，列出 6、9 與 12 的公倍數  
(3)承(2)，以 $[6, 9, 12]$ 表示 6、9 與 12 的最小公倍數

解：(1) 6 的倍數有：

9 的倍數有：

12 的倍數有：

(2) 6、9 與 12 的公倍數有：

(3)  $[6, 9, 12]=$

例 3.2：試利用短除法，求 36 與 84 的最小公倍數。

Ex3.2：試利用短除法，求下列各組數的最小公倍數：

(1) 120、108

(2) 45、105

(3) 21、130

例 3.2：試利用短除法、運算性質方法，求 54、72 與 84 的最小公倍數。

Ex3.2：試利用短除法、運算性質方法，求下列各組數的最小公倍數：

(1) 36、42、54

(2) 22、38、95

**重點 4：標準分解式與最小公倍數**

1. 透過標準分解式的指數來判別倍數：

當 A、B 兩個整數寫成標準分解式時，若滿足：

- (1) B 的質因數包含了 A 中所有的質因數
  - (2) B 的質因數次數大於或等於 A 中相同質因數的次數
- 則 B 是 A 的倍數

2. 利用標準分解式求最小公倍數：

當幾個整數做標準分解式時，先列出所有質因數，再取次數最高者相乘，即為它們的最小公倍數。

例 4.1：下列四個數中，哪些是  $2^3 \times 5$  的倍數？

- (1)  $2^4$       (2)  $2^3 \times 5^2$       (3)  $2^2 \times 5^2 \times 7$       (4)  $2^3 \times 5 \times 7$

Ex4.1：下列四個數中，哪些是  $3^2 \times 5$  的倍數？

- (1)  $3 \times 5^2$       (2)  $3^2 \times 5^2$       (3)  $3^3$       (4)  $3^3 \times 5$

例 4.2：利用短除法，求下列各組數的最小公倍數：

- (1)  $a=120, b=108$       (2)  $a=15, b=60, c=1125$

Ex4.2：利用短除法，求下列各組數的最小公倍數：

- (1)  $a=36, b=48$       (2)  $a=16, b=9$       (2)  $a=60, b=28, c=375$

例 4.3：利用標準分解式，求下列各組數的最小公倍數：

(1)  $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ， $b = 3 \times 5^2 \times 7$

(2)  $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ， $b = 3 \times 5^2 \times 7$ ， $c = 3^2 \times 5 \times 7$

Ex4.3：利用標準分解式，求下列各組數的最小公倍數：

(1)  $a = 36$ ， $b = 48$

(2)  $a = 16$ ， $b = 9$

(2)  $a = 60$ ， $b = 28$ ， $c = 375$

### 重點 5：應用問題

利用下列求幾個數的最大公因數與最小公倍數的方法，應用於解決數學問題上。

1. 利用短除法求最大公因數、最小公倍數：

(1) 求最大公因數：做到所有數沒有共同質因數，即可停止。

(2) 求最小公倍數：做到任兩數都沒有共同質因數，才可停止。

2. 利用標準分解式求最大公因數、最小公倍數：

(1) 求最大公因數：從幾個數的標準分解式，找每個共同質因數中次數最小者相乘。

(2) 求最小公倍數：從幾個數的標準分解式，找所有質因數中次數最高者相乘。

例 5.1：分裝問題

水果店老闆想將 36 個梨子和 48 個蘋果分裝成梨子禮盒和蘋果禮盒出售，梨子禮盒和蘋果禮盒內的水果個數要一樣多，且全部分裝完，如果要選用最大的禮盒來裝，則一盒可以放幾個水果？

Ex5.1：某班有男生 20 人、女生 12 人，現將其分成若干組進行烹飪比賽，每組包含男生及女生，且每組男生人數一樣多、女生人數也一樣多，請問：

(1) 最多可分成幾組？

(2) 此時每組男、女生各多少人？

## 例 5.2：間隔問題

有一塊長 315 公尺、寬 135 公尺的長方形土地，想在其周圍種樹，相鄰兩棵樹之間的距離要相等，且四個頂點都種，則相鄰兩棵樹之間的距離最大是幾公尺？此時總共要種幾棵樹？

Ex5.2：有一個三角形花圃，其三邊長分別為 72 公尺、60 公尺、48 公尺，想在花圃周圍設立路燈，相鄰兩路燈之間的距離要相等，且三個頂點都要設立，則相鄰兩路燈之間的距離最大是幾公尺？此時路燈最少要幾支？

## 例 5.3：同時問題

小翊每 10 天到公園跑步一次，小妍每 14 天到公園跑步一次。某天兩人都到公園跑步，那麼最少要再幾天，兩人才會再度在同一天到公園跑步？

Ex5.3：小妍從遊戲(健康農場)中發現，高麗菜每 45 小時可收成一次，小白菜每 30 小時可收成一次，空心菜每 18 小時可收成一次。某次小妍收成好三種蔬菜，那麼最少要再幾小時，小妍才可以再度一起收成？

Ex5.31：王太太有三個女兒，大女兒每 45 天回娘家一次，二女兒每 30 天回娘家一次，小女兒每 18 天回娘家一次，某天三個女兒都回娘家，則最少要再幾天，三個女兒才會再同一天回娘家？



Ex5.32：到國際機場的車有 A、B 兩種車型，A 車每 45 分鐘發車一次，B 車每 1 小時發車一次，兩車同時由上午 6 點發車，下一次同時發車是什麼時候？

Ex5.33：某便利商店頂樓裝有紅、藍、綠三色霓虹燈，其中紅燈每 35 秒閃一次、藍燈每 40 秒閃一次、綠燈每 25 秒閃一次。若這三色霓虹燈於晚上 7 點同時閃一次，下一次同時閃一次的時間是幾點幾分幾秒？又請問當晚 8 點過後(不含 8 點)，哪一盞顏色的燈會先閃？

#### 例 5.4：堆疊問題

一長方體積木，其長、寬、高分別為 5 公分、2 公分、6 公分，若想堆疊出一個實心立方體，試求所堆疊的正方體中，體積最小是多少立方公分？又共需多少塊長方體積木？

Ex5.4：如果一張長 36 公分，寬 24 公分的長方形紙張，恰好可以分割成大小相同的正方形，則：

- (1)所分割的正方形紙張，其邊長最長是多少公分？
- (2)承(1)，共分割成幾張大小相同的正方形紙張？