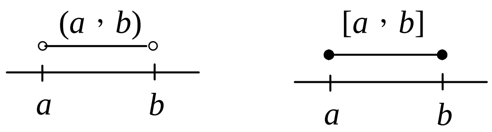
Ch 1.4　函數的極限　　　　三年____班　座號：___　姓名：

重點 1：區間的表示法

意義：設 a，b 為實數，a，b 為端點且 $a<b$，規定：

(1)開區間：$(a，b)=\{x\,|\,a<x<b，x\in R\}$

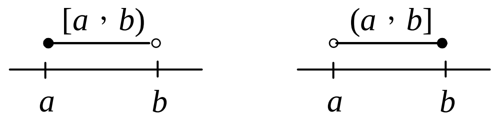
(2)閉區間：$[a，b]=\{x\,|\,a\le x\le b，x\in R\}$



(3)半閉區間(半開區間)：

$[a，b)=\{x\,|\,a\le x<b，x\in R\}$

$(a，b]=\{x\,|\,a<x\le b，x\in R\}$



(4)只有一端點 a 之區間表示

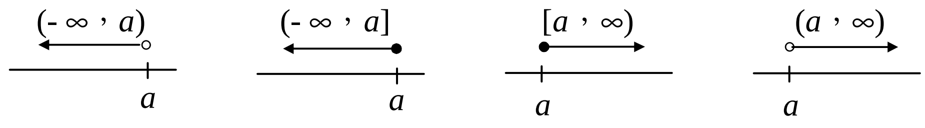
$(-\infty，a)=\{x\,|\,x<a，x\in R\}$

$(-\infty，a]=\{x\,|\,x\le a，x\in R\}$

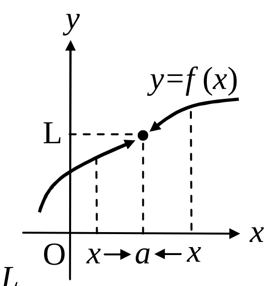
$(a，\infty)=\{x\,|\,x>a，x\in R\}$

$[a，\infty)=\{x\,|\,x\ge a，x\in R\}$

$(-\infty，\infty)=\{x\,|\,x\in R\}$



重點 2：函數的極限



1.定義：當 x 趨近 a 時(從 a 的左、右兩邊趨近，且 $x\ne a$)，若對應的函數值 $f(x)$會趨近定值 L，如圖 則稱 $f(x)$在 $x=a$ 的極限為 L，記作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

2.左極限與右極限表示法：

(1)符號 $x\to a^+$ 表 x 從右邊趨近 a，即 $x>a$ 且 $x\to a$

⇒當 x 從右邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**右極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$

(2)符號 $x\to a^-$ 表 x 從左邊趨近 a，即 $x<a$ 且 $x\to a$

⇒當 x 從左邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 M，則稱 M 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**左極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=M$

3.函數極限的求法：

(1)數據法：實際的計算出 x 從左、右兩邊趨近 a 時函數 $f(x)$的值

(2)圖形法：作函數 $f(x)$圖形，由圖形上點 x 從左、右兩邊趨近 a 時函數 $f(x)$的值

4.函數極限的觀念：當 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ 成立時，表示

(1) $x\to a$ (x 趨近於 a)，指的是 x 從左、右兩邊趨近 a，但不等於 a

(2)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不一定有定義，即 $f(a)$可能存在或不存在

(3)即使函數值 $f(a)$存在，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$也不一定等於 $f(a)$

⇒ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ 成立時，⇒右極限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=$ 左極限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$，不涉及 $f(a)$之值

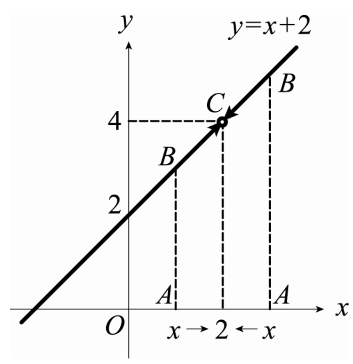
註：$f(x)$在 $x=a$ 的極限取決於接近 a，但不等於 a 的那些 x 的函數值，不是在 $x=a$ 的函數值
即不管 a 有沒有在 $f(x)$的定義域中，都可討論 $f(x)$在 $x=a$ 的極限

註：羅必達法則(L'Hopital's Rule)

設函數 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，當 $x=a$ 代入 $f(x)$，得 $\dfrac{0}{0}$ 時，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p'(x)}{q'(x)}$

其中 $p'(x)$、$q'(x)$分別為 $p(x)$、$q(x)$對 x 的一次微分

例 2.1：已知函數 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$x\ne 2$，試求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$



◎極限與函數值不一定相等

例 2.2：設函數 $f(x)=\begin{cases} 2x+2, & 若x>0 \\ 1, & 若x=0 \\ -x+2, & 若x<0 \end{cases}$，試求：

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$　　(2)函數值 $f(0)$ 與 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否相等？

◎不是所有函數在任意數的極限都存在

例 2.3：設函數 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，討論 $f(x)$ 在 $x=0$ 的極限是否存在？

重點 3：極限的性質

1.意義：給定兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限都存在，則：

$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$c\cdot f(x)$ 與 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0)$在 $x=a$ 的極限也都是存在的

2.設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 L 與 M，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$，$c$ 為一常數，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=L+M$　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=L-M$　　(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot L$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L\cdot M$　　(5)若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$

3.多項式函數與有理函數的極限性質：

設 a 為實數，$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 與 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 為兩實係數多項式函數，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$　　(2) 若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$

註：多項式函數在 $x=a$ 的極限，就是在 $x=a$ 的函數值

例 3.1：試求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-3x^2+6\right)$

例 3.2：試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{100}-2x+3\right)$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+2}$　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}\right)$　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

◎分母為 0 的情形

例 3.3：試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

重點 4：分式多項式的極限

意義：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為多項式函數，對於函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 的極限之求法，分成以下三種情況：

(1)若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$

(2)若 $g(a)=0$ 且 $f(a)\neq 0$，則此極限不存在

(3)若 $g(a)=0$ 且 $f(a)=0$，則將分子與分母的共同因式 $x-a$ 約去後，再依照以上的原則繼續處理

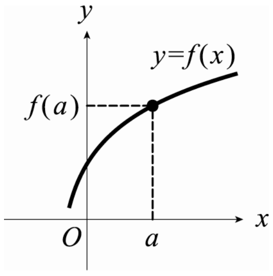
例 4.1：試求 $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{3x-1}{x^2+4x+3}+\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

例 4.2：設 a 為實數，且極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}$ 存在，則：

(1)求 a 的值　(2)求此極限

例 4.3：已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=7$，試求實數 a，b 的值

重點 5：連續函數



1.意義：若函數 $f(x)$ 的圖形在定義域內的一點 a 接連不斷，如右圖

則當 x 趨近 a 時，$f(x)$ 就必須趨近於其函數值 $f(a)$

2.定義：

設 a 為函數 $f(x)$ 定義域的一點，當滿足下列兩個條件時，稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在　　(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

註：(1)直觀上，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續的意義就是函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處沒有斷裂

(2)當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續時，稱 $f(x)$ 為**連續函數**

(3)當函數 $f(x)$ 在區間[a，b]上連續時，指的是 $f(x)$ 除了在區間(a，b)上的每一點都連續外，

也要滿足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

例 5.1：關於連續，下列哪些是正確的？

(1)若 $f(x)$ 為多項式函數，則 $f(x)$ 為連續函數

(2)若 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$x\neq 2$，則在 $x=2$ 處不連續

(3)<u>高斯</u>函數 $f(x)=[x]$，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處不連續

(4)若函數 $f(x)=\begin{cases}2x+2, & 若x>0\\ 1, & 若x=0\\ -x+2, & 若x<0\end{cases}$，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 處不連續

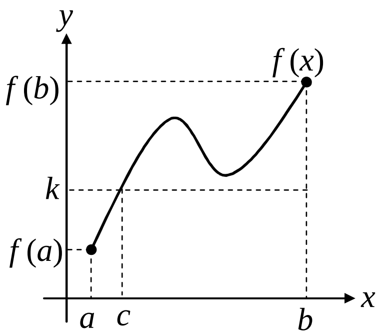
例 5.2：已知函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+3, & 若x\geq 1\\ x+a, & 若x<1\end{cases}$ 為連續函數，試求實數 a 的值。

重點 6：中間值定理(重點在值)

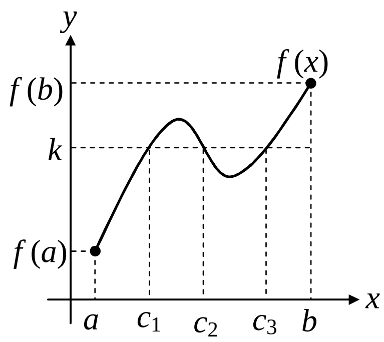
定理：設 $f(x)$在區間$[a，b]$上是連續函數，$f(a)\neq f(b)$，若 k 是介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數，即 $f(a)<k<f(b)$，

則至少存在有一實數 c 介於 a、b 之間，使得 $f(c)=k$

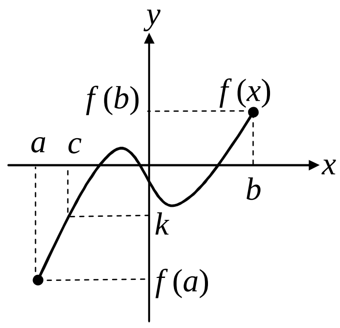
註：當 $k=0$ 時，中間值定理即為勘根定理



(存在 1 個 c 值)



(存在 3 個 c 值)



(存在 1 個 c 值)

例 6.1：已知 $f(x)=(x-49)^2(x-51)^2+2x$，求證：至少有一實數 c，使得 $f(c)=100$

◎勘定方程式實根的位置

例 6.2：已知函數 $f(x)=x\cdot 3^x-50$ 為連續函數，求證：方程式 $x\cdot 3^x-50=0$ 在 2 與 3 之間至少有一實根

重點 7：勘根定理(重點在根)

定理：若 $f(x)$是$[a，b]$上的連續函數，且 $f(a)f(b)<0$ (即 $f(a)$與 $f(b)$異號)，

則至少存在一個實數 $c\in(a，b)$，使得 $f(c)=0$

註：勘根定理就是中間值定理應用於尋求函數的實根(即找出滿足 $f(x)=0$)之推論定理

例 7.1：試證：方程式 $4x^3-6x^2+3x-2=0$ 在 1 與 2 之間至少有一實根

例 7.2：方程式 $x^3-x^2-6x+1=0$ 在哪些連續整數之間有實根？