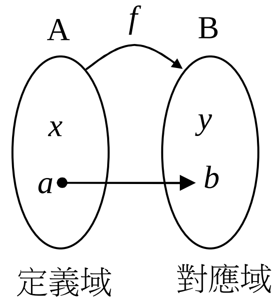
Ch 1.3 函數的概念　　三年____班 座號：___ 姓名：

重點 1：函數



1.定義：設 A 與 B 為兩非空集合，若對於 A 中的每一元素，在 B 中都恰有一個元素與它對應，
則這個對應關係就稱為由 A 映至到 B 的一個函數，記作 $f: A \to B$，或寫成 $y=f(x)$，$x\in$ A
其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數，即變數 y 隨著變數 x 而變化，稱 y 是 x 的函數

註：設函數 $f: A \to B$，
則對於集合 A 中的**每個**元素 a，都可以找到集合 B 中的**唯一元素** b，使得 a 對應到 b
其中 b 稱為函數 f 在 a 的函數值，記為 $f(a)=b$

2.定義域、對應域：

函數 $f: A \to B$ 中的集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為函數 f 的**對應域**

註：若函數沒有指明它的定義域，則函數 f 的定義域就是使函數值為實數的所有實數 x 所成之集合

3.函數值：設函數 $f: A \to B$，則 $f(x)$表示 x 在 B 中的對應元素，稱為函數 f 在 x 的**函數值**

4.值域：函數 $f: A \to B$ 中所有**函數值**所成的集合 f(A)稱為函數 f 的**值域**，即 $f(\text{A}) \subset \text{B}$

註：若函數的定義域與值域皆為實數 R 的子集，則稱此函數為**實函數**

例 1.1：某水缸起初存水 10 公升，如果以每分鐘 2 公升的等速率將水排出，那麼時間 x (分鐘)
與缸內水量 y (公升)的關係，可以用數學式表示為 $y=10-2x$，$0\le x\le 5$，如右圖。
試表示函數的意義，並求當 $x=2$ 時，對應的 y 值為何？

例 1.2：試求下列各函數的定義域：

(1) $f(x)=10-2x$，$0\le x\le 5$

(2)實係數 n 次多項式函數 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$，$a_n\neq 0$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

(4) $f(x)=\sqrt{6-x-x^2}$

(5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$

重點 2：函數的圖形

1.意義：函數 $y=f(x)$，對於定義域中的每一個 x 及其函數值 $f(x)$，

則在坐標平面上，點$(x，f(x))$所構成的圖形，稱為函數 $y=f(x)$的**圖形**

2.常見函數圖形：

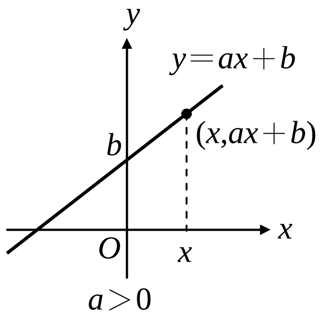
(1)一次函數 $f(x)=ax+b$，$a\neq 0$，圖形是斜率為 a，且 y 截距為 b 的直線

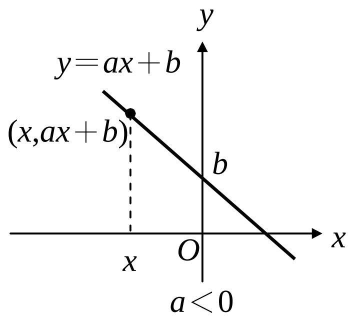
註：當 $a>0$ 時，直線是向右上斜；$a<0$ 時，直線是向右下斜

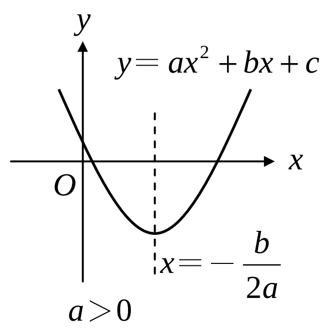
(2)二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，$a\neq 0$，

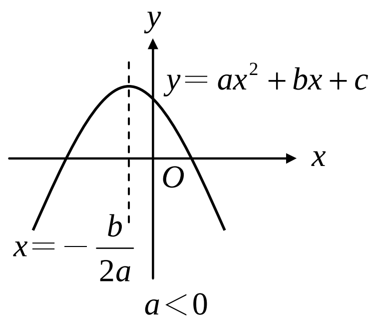
其圖形是以$(-\dfrac{b}{2a}，\dfrac{4ac-b^2}{4a})$為頂點，直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 為對稱軸的拋物線

註：當 $a>0$ 時，拋物線的開口向上；$a<0$ 時，拋物線的開口向下

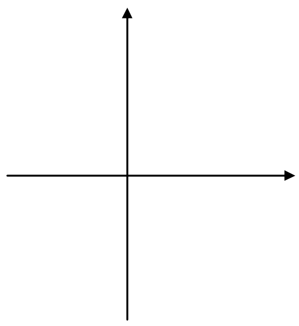








例 2.1：描繪函數 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的圖形。



例 2.2：手機剩餘電量經常用格子數來顯示，有一款手機當充滿電時，螢幕的電量顯示為 5 格。設在待機 x 小時後，剩餘電量的顯示格數為 $f(x)=\left[\dfrac{60}{x+11}\right]$格，其中符號[　]為高斯符號。試問：

(1)待機 13 小時後，剩餘電量的顯示格數為幾格？

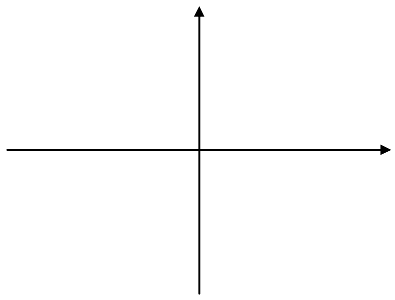
(2)當 x 在何範圍時，剩餘電量的顯示格數會是 3 格？

例 2.3：設兩地之間的通話費，第一個半分鐘是 5 元，之後每半分鐘是 2 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則 x 分鐘的通話費 $f(x)$ 公式為 $f(x)=5-2[1-2x]$ (單位：元)，其中符號$[\quad]$為<u>高斯</u>符號。則：

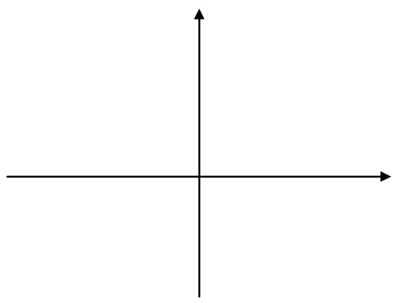
(1)求通話 10 分鐘的通話費

(2)若某人付通話費 55 元，則他通話的時間 x 是何範圍？

例 2.4：描繪<u>高斯</u>函數 $y=[x]$ 的圖形。



例 2.5：描繪函數 $y=\frac{1}{x}$ 的圖形。



重點 3：函數的值域

1.意義：函數的定義域是由函數值為實數來確定，而函數的值域可以藉助函數圖形求出

註：若函數 $f: x\to y$，則定義域是求 x 的範圍，值域是 y 求的範圍

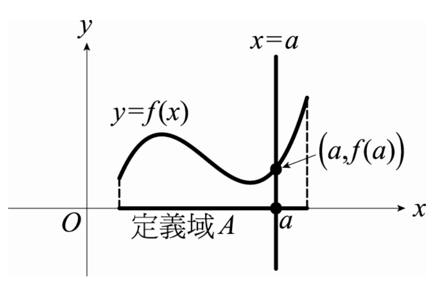
2.性質：定義域中每個 x 都只有一個對應的函數值 y

說明：設函數 $y=f(x)$的定義域為 A，如右圖

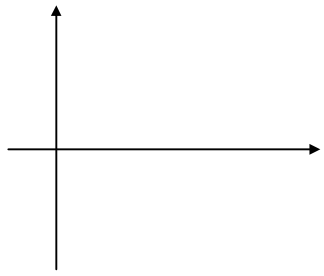
若 $a\in A$，則根據函數圖形的定義，$(a，f(a))$是 $y=f(x)$圖形上的一點。

換句話說，若 a 為函數 $y=f(x)$定義域中的任意數，

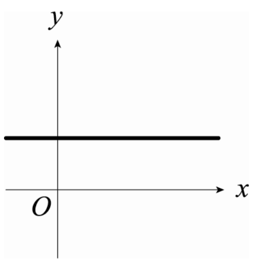
則每一條鉛直線 $x=a$ 與函數 $y=f(x)$的圖形恰有一個交點$(a，f(a))$

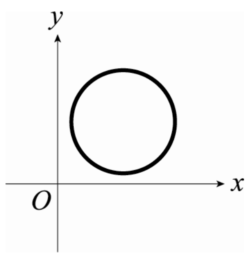


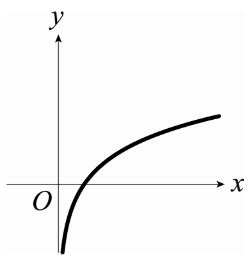
例 3.1：已知函數 $f(x)=-x^2+6x-6$ 的定義域為$\{x \mid 2\le x\le 5，x\in \mathrm{R}\}$，試求 $f(x)$的值域。

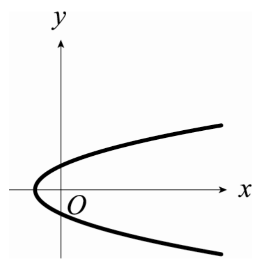


例 3.2：下列各圖形中，哪些**不是**以 x 為自變數的函數圖形？

(1)


(2)


(3)


(4)


重點 4：函數的四則運算

定義：設集合 A 為函數 f 與 g 定義域的交集，對於 A 中的每一個數 x，定義兩函數的四則運算如下：

(1)加法運算：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

(2)減法運算：$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

(3)乘法運算：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

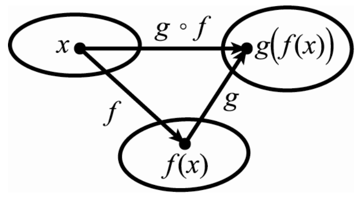
(4)除法運算：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍，但 $g(x)\ne 0$

註：加、減、乘法的定義域為 f 與 g 定義域的交集；除法的定義域為 f 與 g 定義域的交集扣除 $g(x)=0$ 的部分

例 4.1：已知函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=\sqrt{1-x}$，試求下列各函數及其定義域：

(1) $(f+g)(x)$　　(2) $(f-g)(x)$　　(3) $(f\cdot g)(x)$　　(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

重點 5：合成函數



1.定義：給定函數 f 與 g ，定義 f 與 g 的合成函數 $g\circ f$ 為 $(g\circ f)(x)=\underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{\text{先作}f})}_{\text{再作}g}$

2.圖解：對於 x ，函數 f 將 x 對應於 $f(x)$ ，接著函數 g 再將 $f(x)$ 對應於 $g(f(x))$

將「 x 對應於 $g(f(x))$ 」這個新函數稱為 f 與 g 的**合成函數**，以 $g\circ f$ 表示

註： $g\circ f$ 的定義域為：在 f 的定義域中，使得 $f(x)$ 的值落在 g 的定義域中之所有實數 x 所成的集合

設函數 $f：A\to B$ 與函數 $g：B\to C$，則 $g\circ f：A\to C$

例 5.1：已知函數 $f(x)=3x+2$ 與 $g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ ，試求下列各合成函數：

(1) $(g\circ f)(x)$　　(2) $(f\circ g)(x)$

例 5.2：已知函數 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 與 $g(x)=\frac{x}{x+1}$ ，試求下列各函數：

(1) $(f+g)(x)$　　(2) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$　　(3) $(f\circ g)(x)$

例 5.3：設 $f(x)=x-2$ ， $g(y)=y^3$，若 $h(x)=(g\circ f)(x)$ ，試求 $h(x)$

例 5.4：若將 $y=x^3$ 的圖形沿 x 軸向右平移 2 單位，可得新圖形的函數為何？

例 5.5：(1)利用平移的概念，繪出函數 $y=(x-2)^2-3$ 的圖形。
(2)試求函數 $y=(x-2)^2-3$ 的值域。

例 5.6：設函數 $f(x)=x+8$，$g(x)=x^2$。試求：
(1) $g(f(1))$ (2) $f(g(1))$