Ch 1.2 無窮等比級數 三年____班 座號：___ 姓名：

重點 1：無窮級數的和

1.意義：設$\langle a_n\rangle$：a_1，a_2，a_3，⋯，a_n，⋯為一無窮數列，設前 n 項之和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，則：

(1)若無窮數列$\langle a_n\rangle$為**收斂數列**，且其極限為$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，稱$\langle a_n\rangle$為無窮級數為**收斂級數**，

則其和$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=S$

(2)若無窮數列$\langle a_n\rangle$為為**發散數列**，則稱此無窮級數為**發散級數**，不能求其和(發散)

2.無窮級數的求值及收斂與發散的判斷

(1)先求前 n 項之和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

(2)再依 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 的收斂或發散決定無窮級數$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$的收斂與發散

若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，則稱無窮級數為**收斂級數**，且無窮級數的和$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=S$

若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，則稱無窮級數為**發散級數**，且無窮級數的和不存在

◎無窮級數的求值

例 1.1：(1)設 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+(\frac{1}{2})^n$，試求 S_n

(2)利用極限的概念，試求 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$ 之值

例 1.2：(1)設 $S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$，試求 S_n

(2)利用極限的概念，求 $S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 之值

重點 2：無窮等比級數的收斂與發散

1.意義：設無窮等比數列$\langle a_n\rangle$：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，

若首項$a_1=a\neq 0$，公比$r\neq 0$，則前n項的和$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & 當\ r\neq 1時\\ na, & 當\ r=1時\end{cases}$

(1)當$-1<r<1$時，因為$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\right)=\dfrac{a}{1-r}\lim\limits_{n\to\infty}(1-r^n)=\dfrac{a}{1-r}$

即稱無窮等比級數$\langle a_n\rangle$為收斂級數，且$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$

(2)當$r=1$時，$S_n=na$，因為數列$\langle S_n\rangle$為發散數列(當$a\neq 0$時)，則此無窮等比級數不能求和

(3)當$r\leq -1$或$r>1$時，因為$\langle r^n\rangle$為發散數列，所以$\langle S_n\rangle$也是發散數列，則此無窮等比級數不能求和

2.無窮等比級數的斂散條件：

(1)當$-1<r<1$時，此無窮等比級數為**收斂級數**，級數的和為$S=\dfrac{a}{1-r}$

(2)當$r\leq -1$或$r\geq 1$時，此無窮等比級數為**發散級數**，級數不能求和

註：無窮等比數列收斂的充要條件為$-1<r\leq 1$

無窮等比級數收斂的充要條件為$-1<r<1$

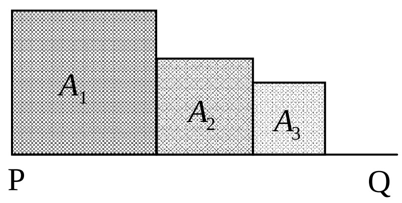
例 2.1：判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數，若為收斂級數，試求其和。

(1)$1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots$　　(2)$\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{20}-\dfrac{3}{40}+\cdots$　　(3)$1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{64}{27}+\cdots$

例 2.2：判斷下列各無窮等比級數的斂散性，若收斂，並求其和：

(1)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+2}}{5^k}$　　(2)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k-(-1)^k}{5^k}$

例 2.3：如右圖，設$\overline{PQ}=2$，以$\overline{PQ}$的一半為邊長，作一正方形A_1，再以剩下線段的一半為邊長作一正方形A_2，如此繼續下去，得到一序列的正方形A_1，A_2，A_3，…如右圖所示，試求這些正方形面積的和。



重點 3：循環小數化為分數

1.意義：循環小數可以化成分數，而分數為有理數，即循環小數都是有理數

2.方法：

A.將循環小數看成收斂的無窮等比級數，利用無窮等比級數的和求循環小數

B.利用下列方式化為小數：

(1) $0.\overline{abc}=\dfrac{100a+10b+c}{999}$　(2) $0.a\overline{bc}=\dfrac{100a+10b+c-a}{990}$　(3) $0.ab\bar{c}=\dfrac{100a+10b+c-(10a+b)}{900}$

◎循環小數化為分數

例 3.1：將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{42}$　(2) $0.4\overline{23}$　(3) $0.42\bar{3}$

重點 4：夾擠定理

意義：若給定一個數列 $\langle a_n\rangle$，若存在兩個數列 $\langle b_n\rangle$ 與 $\langle c_n\rangle$ 滿足：

(1)從第 k 項之後 (即 $n\geq k$)，恆有 $b_n\leq a_n\leq c_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=S=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$

則數列 $\langle a_n\rangle$ 是收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$S，稱為夾擠定理

◎夾擠定理

例 4.1：已知無窮數列 $\langle c_n\rangle$ 滿足不等式 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{6n^2}\leq c_n\leq\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{6n^2}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$。

例 4.2：利用不等式 $2^n\geq n^2$，$n\geq 4$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$。