Ch 1.2 期望值、變異數與與標準差　　　　　三年___班　座號：____　姓名：

重點 1：期望值

1.前言：(1)由隨機變數的機率質量函數，了解各隨機數取值發生機率的分布情形

(2)利用求得隨機變數的期望值、變異數與標準差等參數，來描述隨機變數的集中趨勢與分散程度等特徵

2.定義：設隨機變數 X 的機率分布表如下：

數值 X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
機率 P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

則稱隨機變數 X 的**數學期望值**為 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，也簡稱為「**期望值**」

3.性質：隨機變數 X 的期望值是所有可能結果的「算術平均數」或「加權平均數」

◎期望值

例 1.1：某幼稚園將獎品 50 份包裝後讓小朋友抽獎，其中價值 100 元的 A 獎有 5 份，價值 50 元的 B 獎有 20 份，價值 30 元的 C 獎有 25 份。那麼每份獎品的平均價值是多少呢？

例 1.2：擲一個公正的骰子，若擲出 1，2 或 3 點可得 10 元，擲出 4 或 5 點可得 20 元，擲出 6 點可得 50 元。試求擲骰子一次所得金額的期望值。

例 1.3：袋中裝有相同大小的 10 元代幣 3 枚，5 元代幣 2 枚，自袋中任取 2 枚，則所得金額的期望值為多少？

例 1.4：一箱子中有 10 個燈泡，其中有 2 個是壞的。今從箱子中取 3 個燈泡測試，試求取出的燈泡中壞燈泡個數的期望值？

例 1.5：在丟硬幣的遊戲中，玩者同時丟 3 枚硬幣。若其中出現 1 個正面可得 5 元；出現 2 個正面可得 10 元；出現 3 個正面可得 15 元；若全無正面就需付給莊家 100 元。試求：

(1)玩者玩這個遊戲一次所得金額的期望值是多少？

(2)若改成全無正面時需付給莊家 60 元，其餘不變，則玩者玩一次的期望值是多少？

例 1.6：保險公司針對 60 歲長青族推出一年期壽險，保險額 2000 萬元，保費 2400 元。若依統計資料顯示，60 歲長青族一年內死亡的機率為 0.0001。則每張保單中，保險公司利潤的期望值是多少？

重點 2：變異數、標準差

1.**數據**之變異數：設 n 個數據為 x_1， x_2，⋯， x_n，則：

(1)平均數 $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$　　(2)變異數 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ，σ 為標準差

◎說明：設 n 個資料共有 k 個相異值 x_1^*，⋯， x_k^* ，且其出現的次數分別為 f_1，⋯， f_k ，則

(1)平均數 $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^* f_i=\sum_{i=1}^{k}p_i x_i^*$ ，其中 $p_i=\frac{f_i}{n}$

(2)變異數 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^*-\mu\right)^2\cdot p_i$ ，其中 σ 為標準差

2.**隨機變數**之期望值、變異數、標準差之定義：

設隨機變數 X 的機率分布如下：

數值 X	x_1	x_2	⋯	x_n	合計
機率 P	p_1	p_2	⋯	p_n	1

(1)期望值為 E(X)＝μ

(2)變異數 $Var(X)=(x_1-\mu)^2\cdot p_1+(x_2-\mu)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2\cdot p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\mu)^2$

(3)標準差σ＝ $\sqrt{Vax(X)}$

◎計算公式之關係式：

(1)變異數 Var(X)就是離均差平方 $(X-\mu)^2$ 的期望值，即 Var(X)＝$\underline{E[(X-\mu)^2]}$

(2) $Var(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\mu^2=E(X^2)-\mu^2=\underline{E(X^2)-[E(X)]^2}$

說明：$\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}p_i x_i+\mu^2\sum_{i=1}^{n}p_i$

$=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-2\mu^2+\mu^2=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\mu^2=E(X^2)-\mu^2$

$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-\mu^2$＝E(X^2)－[E(X)]^2

◎變異數求法(1)：Var(X)＝$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2$

例 2.1：丟擲一均勻的硬幣 3 次，令 X 表示出現的正面數，求 X 的期望值、變異數與標準差。

◎變異數求法(2)：Var(X)＝$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,2}-\mu^2$ ＝E(X^2)－[E(X)]^2

例 2.2：已知一個不公正的骰子，其擲出各點數的機率與該點數成正比，試求擲此骰子一次所出現點數的期望值與變異數。

重點 3：變異數與標準差的性質

1.隨機變數的線性關係：

若 Y 是隨機變數 X 的線性函數，即令 Y＝aX＋b，a ，b 為常數，則 Y 是一隨機變數，且 Y 的機率分布如下：

Y	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

即隨機變數 Y 的期望值 E(Y)＝E(aX＋b)＝aE(X)＋b

※說明：$E(Y)=p_1(ax_1+b)+p_2(ax_2+b)+\cdots+p_n(ax_n+b)$

$=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n)=aE(X)+b$

2.期望值、變異數、標準差的運算性質：

若 X 為隨機變數，則對任意常數 a ，b ，線性函數 Y＝aX＋b 也是隨機變數，且滿足下列性質：

(1)期望值 E(aX＋b)＝aE(X)＋b

(2)變異數 Var(aX＋b)＝ a^2Var(X)

(3)標準差 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

例 3.1：福利社舉辦抽獎活動，原本所有獎額的期望值為 250 元，標準差為 120 元。今為慶祝校慶，將每個獎項的獎額提高 20%，再贈送 100 元現金抵用券。求慶祝活動中抽獎一次所得獎額的期望值與標準差。

例 3.2：已知隨機變數 X 滿足 E(X)＝50，Var(X)＝14^2 ，試求下列各值：

(1) E(3X)　(2) E(4X＋5)　(3) E(－2X＋3)　(4) Var(4X＋5)　(5) Var(－2X＋3)