2.3 組合 (combination)　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：完全相異物之組合(combination)

1.意義：將物件選出來而**不用排列**，稱為物件的**組合**

2.完全相異物之組合數表示法：

用 C_k^n 表示從 n 個**不同的物品**中挑出 k 個**不同物品**的組合數$(0\le k\le n)$，則 $C_k^n=\dfrac{P_k^n}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

註：從 n 個不同的事物中取出 k 個的排列數 P_k^n 是組合數 C_k^n 的 $k!$ 倍，即 $C_k^n\times k!=P_k^n$

例 1.1：試計算下列的組合數：

(1) C_2^{10}　(2) C_8^{10}　(3) C_{10}^{10}　(4) C_0^{10}

例 1.2：在 1，2，3，4 之中挑三個數出來，則其排列數與組合數各為何？

例 1.3：某地舉行議員選舉，甲、乙、丙、丁、戊 5 人要選出 3 人。試問：

(1)當選人的組合有幾種可能？寫下可能的組合情形。

(2)落選人的組合有幾種可能？並寫出所有可能的組合

例 1.4：(1)正 7 邊形有多少條對角線？

(2)正 n 邊形有多少條對角線？

例 1.5：將 x，x，x，x，x，x，x，y，y，y 排成一列有幾種方法？

例 1.6：某籃球隊共 10 名選手，每場比賽都要挑選其中的 5 名擔任先發球員。但是先發陣容中唯一的控球後衛只有甲或乙可勝任，而且這兩人不能同時上場。試問共有多少種先發陣容？

例 1.7：將$\{a, b, c, d, e, f\}$分成 2 個非空集合，共有多少種方法？

重點 2：組合數C_k^n的性質

組合數C_k^n的性質：

1.$C_0^n=1$，$C_n^n=1$

2.當$0\le k\le n$時，$C_k^n=C_{n-k}^n$

註：解釋「為從n個人中選出k人為一組時，必也相對的留下$n-k$人為一組，兩者的選法數是一樣的」

3.當$1\le k\le n-1$時，$C_k^n=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$ **(巴斯卡定理)**

註：設甲為這n個人中的其中一人，則自此n個人中選出k人為一組時，可以分成下列兩種情形：

(1)「甲被選中」：則須由剩下的$n-1$人中選出$k-1$人與甲合成一組，選法有C_{k-1}^{n-1}種

(2)「甲未被選中」：則須由甲以外的$n-1$人中選出k人，選法有C_k^{n-1}種

⇒組合數$C_k^n=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$

例 2.1：試計算下列之組合數：

(1)C_3^5 (2)C_4^6 (3)C_3^7 (4)C_{98}^{100}

例 2.2：設$C_{r+1}^{43}=C_{2r}^{43}$，試求r之值。

例 2.3：選出正確的選項：

(1)$C_{30}^{37}=C_7^{37}$ (2) $C_{50}^{99}+C_{49}^{99}=C_{49}^{100}$ (3)$C_{25}^{50}-C_{25}^{49}=C_{24}^{49}$ (4)$C_2^{99}+C_3^{99}+C_4^{100}=C_4^{101}$

重點 3：重複組合

1.意義：從 n 種不同物品中取出 k 個(每種物品都至少有 k 個)，物品可以重複出現的組合有 $H_k^n=C_k^{n+k-1}$ 種方法數

2.重複組合類型：

(1)從 n 類不同事物中選取 k 個(每類的個數均至少 k 個且可以重複)選取的組合，有多少種可能的選法？

(2) n 元一次方程式 $x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n=k$ 的**非負整數解**有多少組？

(3)將 k 個相同的白球全部分給 n 個人，有多少種分法？

註：即視為將 k 個「○」與 $n-1$ 個「|」(隔板)作直線排列的排列數

例 3.1：從 1，2，3，4 四種物品之中選出兩個的組合，可以重複選取，則共有幾種方法？

例 3.2：在 1，2，3 這三種物品之中選出 5 個的重複組合有多少方法？

例 3.3：超級市場蘋果、橘子、梨子、芭樂皆堆積如山。小芬一共要買 9 個，則共有多少種買法？

例 3.4：試求 $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ 的非負整數解(即 x_1，x_2，x_3，$x_4\geq 0$ 且皆為整數)共有多少組？

例 3.5：試求 $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ 的**正整數解**共有多少組？

例 3.6：不等式 $x+y+z+u\leq 9$ 的非負整數解有多少組？(補充)

重點 4：組合數的應用

意義：實際生活中或應用上，排列與組合經常交錯在一起，是分不開的。窮舉、樹狀圖以及利用基本原理的思考方式可利用加法、乘法、排容(取捨)原理等計算其方法數，才是排列組合的根本

例 4.1：由男生 10 人，女生 5 人中選出一個 5 人小組，則：
(1)選出 3 名男生 2 名女生的選法共有多少種？
(2)若規定男女生至少各有 2 人，則共有多少種選法？

◎分給人

例 4.2：將 9 本不同的書分給甲、乙、丙 3 人，試求下列的分法：
(1)每人各得 3 本　(2)甲、乙各得 4 本，丙得 1 本　(3)甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本

例 4.3：將 9 本不同的書分成 3 堆，試求下列的分法：
(1)每一堆各 3 本　(2)有兩堆 4 本，另一堆 1 本　(3)分成（3 , 2 , 2 , 1 , 1）五堆