Ch1.2 級數 (series)　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：級數

1.定義：將數列 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的各項依序用「＋」加號連結起來，形如 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，稱為一個級數，其中 a_1 稱為此級數的首項(第一項)，a_n 稱為此級數的第 n 項(有限級數的末項)

2.表示法：

一般以 S_n 表示級數的前 n 項和(或稱前 n 項的部分和)，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

註：有限級數表示為 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$　　(a_1 稱為首項(第一項)，a_n 稱為第 n 項(末項))

無限級數表示為 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　　(a_1 稱為首項(第一項)，a_n 稱為第 n 項)

例 1.1：試寫出數列 $\langle n^2\rangle$ 所形成的級數，並求此級數的前 5 項和。

重點 2：等差級數

1.定義：若數列 $\langle a_n\rangle$：a_1，a_2，a_3，…，a_n 為**等差數列**，則 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 稱為**等差級數**的前 n 項和

2.數學表示：

設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首數為 a_1，公差為 d

$\Rightarrow$數列 $\langle a_n\rangle$：a_1，a_1+d，a_1+2d，……，$a_1+(n-1)d$

$\Rightarrow$級數 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$

3.等差級數前 n 項和**公式**：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

4.若 a，b，c 成等差數列，則 b 為其等差中項(算數中項)，且 $b=\dfrac{a+c}{2}$，又 $a+b+c=3b$

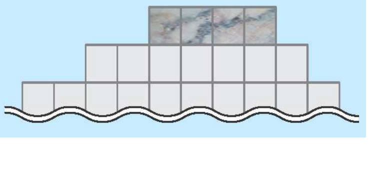
若 a，b，c，d，e 成等差數列，則 c 為其等差中項，且 $c=\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{a+e}{2}$，又 $a+b+c+d+e=5c$

例 2.1：試求等差級數 $1+2+3+\cdots+n$ 的和：

例 2.2：試求下列等差級數的和：

(1) $1+3+5+\cdots+19$　　(2) $100+97+94+\cdots+31$

例 2.3：某建築物外牆側面共有 40 層，最上面的 3 層如圖所示，每一小方塊代表面積為一平方公尺的正方形；每往下一層時，左方多兩塊小方塊、右方多一塊小方塊。
建商要用每塊面積為一平方公尺的正方形大理石板覆蓋外牆。
請問建商要準備多少塊大理石板？



重點 3：等比級數

1.定義：若數列$\langle a_n \rangle$：a_1，a_2，a_3，…，a_n為等比數列，則$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$稱為**等比級數**的前 n 項和

2.數學表示：

設等比數列$\langle a_n \rangle$的首數為$a_1 \neq 0$，公比為 $r \neq 0$

$\Rightarrow$數列$\langle a_n \rangle$：a_1，$a_1 r$，$a_1 r^2$，……，$a_1 r^{n-1}$

$\Rightarrow$級數$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-1}$

3.等比級數求和**公式**：$S_n = \begin{cases} na_1 & ,當 r = 1 時 \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} & ,當 r \neq 1 時 \end{cases}$ （註：$\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ ）

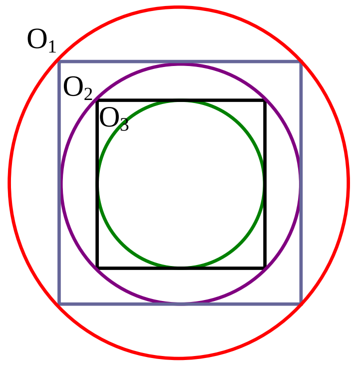
4.若 a，b，c 成等比數列，則 b 稱為其等比中項(幾何中項)，且 $b = \sqrt{ac}$

例 3.1：試求下列等比級數的和：

(1) $3+6+12+\cdots+3072$ (2) $54-36+24+\cdots-\dfrac{64}{9}$ (3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

例 3.2：如圖，單位圓記為 O_1。作 O_1 內接正方形的內切圓，記為 O_2。作 O_2 內接正方形的內切圓，記為 O_3，以此類推。

試求：(1)O_2 的半徑 (2) O_1，O_2，O_3，…，O_8 的圓周長總和



例 3.3：<u>小芬</u>計畫每個月月初存入銀行 10000 元，以月利率 0.2 %複利孳息。則 5 年後<u>小芬</u>可以存到多少錢？

(四捨五入取到百位，已知$(1.002)^{60} \approx 1.12736$)

重點 4：由部分和反求數列中的一般項(第 n 項 a_n)

意義：利用前 n 項和的通式 S_n ，$a_1=S_1$，且當 $n\geq 2$ 時，第 n 項 $a_n=S_n-S_{n-1}$，求第 n 項的通式 a_n

例 4.1：已知數列$\langle a_n\rangle$的前 n 項和 $S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$，試求第 n 項 a_n。

重點 5：符號Σ的意義與性質

1.Σ的意義：級數可以用符號Σ(讀作 *sigma* 或 *summation*，是連加或求和的意思)來簡寫表示

如：級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 簡寫成 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ ，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$

2.表示法：符號 $\sum\limits_{k=m}^{n}a_k=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$

其中 $\sum\limits_{k=m}^{n}a_k$ ，讀作「*sigma* a_k，k 從 m 到 n)，意即將 $k=m$(稱為下限值)變動到 $k=n$(稱為**上限值**)，m，n 是**整數**，且 $m\leq n$，逐漸代入 a_k (k 稱為指標)後，全部加起來

3.符號Σ的特性：

(1)指標 k 也可以改用**其他文字符號**，並不影響式子的意義。例如 $\sum\limits_{t=1}^{3}t^2$ ，$\sum\limits_{j=1}^{3}j^2$ 都等於 $1^2+2^2+3^2$

(2)同一個式子，可以用不同的指標範圍與一般項公式來表示。例如：$\sum\limits_{k=2}^{4}(k-1)^2$ 也等於 $1^2+2^2+3^2$

例 5.1：試展開下列各式：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{4}a_k$ (2) $\sum\limits_{k=3}^{7}a_k$ (3) $\sum\limits_{k=1}^{4}k$ (4) $\sum\limits_{k=2}^{7}k^3$

例 5.2：下列哪些式子等於 $3+5+7+9$？

(1) $\sum\limits_{m=1}^{4}(2m+1)$ (2) $\sum\limits_{k=3}^{6}(2k-3)$

例 5.3：展開下列級數，並求其值：

(1) $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{5}7$ (3) $\sum_{k=2}^{5}k^2$

例 5.4：(1)已知一等差級數共有十項，首項為 2，公差為 3，試將其表為Σ的形式

(2)一等比級數首項為 5，第二項為 10，最後一項為 320，試將其表為Σ的形式

重點 6：Σ的意義運算性質

1.若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

3.若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ 註：$\sum_{k=1}^{n}(a_k\times b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$

4.求和公式

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

註：較複雜的級數求和，可將式子先寫成Σ的形式，再利用Σ的運算性質拆開成此三個基本公式的求和

例 6.0：試化簡下列各式：

(1) $\sum_{k=1}^{3}5$　(2) $\sum_{k=1}^{3}(a_k+b_k)$　(3) $\sum_{k=1}^{5}5a_k$

例 6.1：已知 $\sum_{k=1}^{7}a_k=55$，$\sum_{k=1}^{7}b_k=66$，試求下列各值：

(1) $\sum_{k=1}^{7}2a_k$　(2) $\sum_{k=1}^{7}(2a_k-3b_k+4)$

例 6.2：試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{66}k$　(2) $\sum_{k=1}^{20}k^2$　(3) $\sum_{k=6}^{18}k^3$

例 6.3：試求下列各級數的和：

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100$

(2) $1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+(2n-1)(2n+1)$

重點 7：Σ 的分項對消運算性質

意義：把級數中的每項拆成正負兩項，使得各項相加時可以抵銷，常見級數有：

1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{n}{n+1}$

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})=\frac{1}{2}(\frac{n+1}{n+2})$

例 7.1：試求級數 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 的和。

例 7.2：黑板上寫著一排白色的 20 個連續的平方數 1，4，9，⋯，400。
小璿依序將每一個白色數字減 1，用紅色粉筆寫下結果；
全部算完後，再把所有的白色數字擦掉。黑板上留下 20 個紅色的數。
試求除了 0 以外，其他 19 個數的倒數和。