3.5 指數與對數的應用

一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：常用對數表與查表

意義：底數為 10 的對數稱為**常用對數**。常用對數表是以 10 為底數，真數 1.00 到 9.99 之間，每隔 0.01 的所有對數值，這些對數值是取到**小數點後四位的近似值**。

表示真數 1.1　　常用對數表　$y=\log_{10}x$　　表示為 0.0253

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
⋯⋯					⋯⋯				⋯⋯	
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

例 1.1：試利用常用對數表，查出 log 1.68 的近似值。

解：步驟如下：

$\log 1.68$

1.從對數表裡 x 值的直行找到_____，橫列找到____

2.可在過___的橫列與過___的直行交會處找到______

3. $\log 1.68 \approx$_________

常用對數表　$y=\log_{10}x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289

例 1.2：已知 $\log x = 0.3892$，利用對數表反查真數 x 的值。

例 1.3：試利用常用對數表，查出 $\log_2 3$ 之對數值。

重點 2：科學記號

意義：任意正實數 A 都可以用 A＝$k\times10^n$，$1\le k<10$，n 是整數的形式來表示，稱為**科學記號**表示法

例 2.1：試利用科學記號表示 16800 與 0.00168

重點 3：對數值求法

意義：對數的真數在 1.00 到 9.99 之間，可以利用**對數表**查得其對數值；

而不在這個範圍內的真數，則要藉由**科學記號**與對數運算性質等，求得其對數值

例 3.1：由對數表知 $\log 1.68 \approx 0.2253$，試求下列各對數值：

(1) $\log 16800$　　　(2) $\log 0.00168$

例 3.2：利用對數表，試求下列各式中 x 的近似值：

(1) $\log x = 2.5514$　　　(2) $\log x = -2.1314$

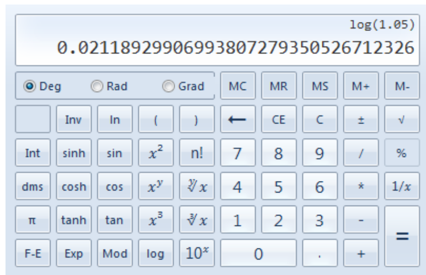
重點 4：利用計算器求對數值

意義：有「log」功能鍵的計算機或是電腦的小算盤，就可以直接按出近似值

註：計算器的使用方法或規則，請務必詳閱其**使用手冊**

例 4.1：試利用計算機，求 $\log 1.05$ 之值。(至少取到小數點後第四位)

解：依序鍵入___，___，___，log，$\Rightarrow \log 1.05 \approx$ __________



重點 5：內插法

1.意義：利用查表法、科學記號化簡運算等皆無法求得對數之近似值時，則可利用**內插法**求得其近似值。

2.內插法是利用相似三角形中，對數的近似值成比例，運算求得對數之近似值

原理：

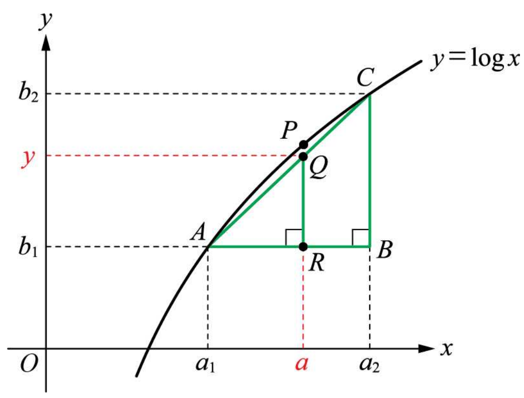
已知 $b_1 = \log a_1$，$b_2 = \log a_2$，且 $a_1 < a < a_2$，試求 $\log a$

如右圖，由 $y = \log x$ 的圖形中，當 a_1 與 a_2 很接近時，點 P 與 Q 亦非常接近

設 $P(a, y) \approx Q(a, y)$

$\Rightarrow \triangle ARQ \sim \triangle ABC$，$\dfrac{\overline{RQ}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}$，$\dfrac{y-b_1}{b_2-b_1} = \dfrac{a-a_1}{a_2-a_1}$

$\Rightarrow y = b_1 + (b_2 - b_1)\dfrac{a-a_1}{a_2-a_1}$



例 5.1：已知 $\log 2.73 \approx 0.4362$，$\log 2.74 \approx 0.4378$，試利用內插法，求 $\log 2.736$ 之近似值。(取到小數點後第四位)

例 5.2：已知 $\log 1.05 \approx 0.0212$，$\log 2.65 \approx 0.4232$，$\log 2.66 \approx 0.4249$，試求 $(1.05)^{20}$ 的近似值到小數點後第四位。

例 5.3：已知 $\log 1.23 \approx 0.0899$ ，$\log 3.45 \approx 0.5378$ ，$\log 2.06 \approx 0.3139$ ，試求 $\sqrt{123\times 345}$ 的值。

重點 6：首數與尾數

1.意義：設 A 為正實數，將 log A 表示為 $\log A = n + \log k$，其中 n 為整數，$0 \le \log k < 1$

則稱 n 為 log A 的**首數**，$\log k$ 為 log A 的**尾數**

2.首數與尾數的解讀：

(1)若首數 $n \ge 0$，表示 A 的**整數部分為($n+1$)位數**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

(2)若首數 $n < 0$，表示 A 在小數點後**第 n 位開始出現不為 0 的數字**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

例 6.1：已知 $\log 1.68 \approx 0.2253$，試分別指出 log 16800 與 log 0.00168 的首數與尾數。

例 6.2：已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，求：

(1) 6^{50} 是幾位數？6^{50} 的最高位數字是多少？

(2) $(\frac{1}{5})^{60}$ 的小數點後第幾位數字才開始不為 0？又小數點後開始不為 0 的數字是多少？

例 6.3：將 $\frac{5^{50}}{9^{100}}$ 表為純小數時，試問小數點後第幾位才開始出現不為 0 的數字？此數字為何？($\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$)

重點 7：指數與對數的應用

1.意義：自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象，如：人口數量、細胞分裂、放射性元素衰變(半衰期)與藥物代謝，及社會經濟活動中的複利、貸款等相關的問題，通常可以建立指數方程式或指數不等式之數學模型，再利用指數、對數求得其解。

2.半衰期：設原質量為 M_0，半衰期為 k，經過 n 時間後，剩下質量 $M=M_0(\frac{1}{2})^{\frac{n}{k}}$

3.單利與複利之計息：

一般計息的方式，分為單利與複利兩種。設本金是 P，利率是 r，期數為 n，則：

(1)單利計息：本利和＝本金＋利息＝$P+n\cdot P\cdot r=P(1+nr)$

(2)複利計息：本利和＝本金＋利息＝$P(1+r)^n$

註：單利與複利之差別：單利的本金永遠固定，而複利的利息持續滾入本金生利息

例 7.1：數學老師在課餘時間向同學挑戰，宣布誰可以在不撕破紙的情形下將影印紙連續對摺十次，就能獲得一份小禮物。全班同學都大喜過望，馬上動手摺。已知一張影印紙的厚度是 0.01 公分。試問：

(1)計算對摺十次時的厚度

(2)理論上，對摺幾次後，厚度可以從地球到月球？(地球到月球距離以 40 萬公里計，$\log 2\approx 0.3010$)

例 7.2：西元 1947 年，死海西北的一個少年為了追羊，朝山洞裡丟石頭，意外打破瓦罐而發現“死海古卷”。這在歷史學、考古學、宗教學上是極重要的發現。假設專家在 1950 年測量古卷上碳 14 的含量，發現是正常含量的 78 %。已知碳 14 的半衰期約為 5700 年。試問古卷應該是何時的古物？

(已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 13\approx 1.1139$)

例 7.3：小芬有一百萬元想要存款十年，銀行提供兩個存款方案：

(方案一)年利率 6 %，單利計算。

(方案二)年利率 5 %，複利計算。試給小芬建議，說明哪一個方案較佳。

(已知 $\log 1.05\approx 0.0212$，$\log 1.06\approx 0.0253$，$10^{0.212}\approx 1.63$)