3.4 對數函數(logarithmic function)　　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：對數函數的圖形及其性質

1.定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，則對於任意正實數 x，稱 $f(x)=y=\log_a x$ 是以 a 為底數，x 為真數的對數函數

註：對數函數 $y=f(x)=\log_a x$ 之定義域：x 為所有正實數，值域：y 為所有實數

2.對數函數 $f(x)=\log_a x$ 圖形及其性質：

(1)圖形恆在 y 軸的右方(真數 x 為正實數)，而 $f(x)>0$ 或 $f(x)=0$ 或 $f(x)<0$ 皆有可能

(2)圖形過點(1，0)

(3)以 y 軸為漸近線

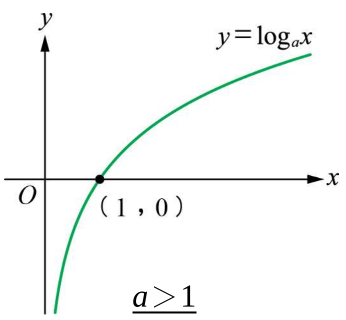
(4)當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為嚴格遞增函數，圖形由左往右逐漸上升。凹口向下的圖形

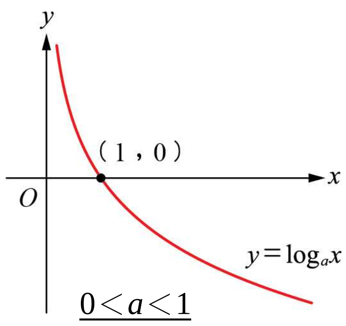
當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 為嚴格遞減函數，圖形由左往右逐漸下降。凹口向上的圖形

註：嚴格遞增函數：當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha<\log_a \beta$

嚴格遞減函數：當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha>\log_a \beta$

(5)圖形在 y 軸右方，與鉛直線 $x=h$ 恰交一點；圖形與水平線 $y=k$ 都恰交一點

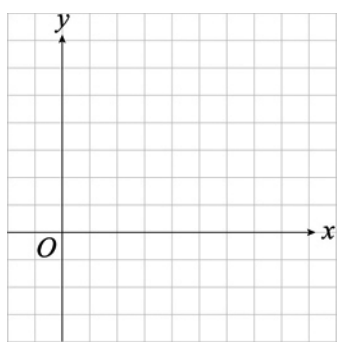




例 1.1：利用描點法描繪函數 $y=\log_2 x$ 的圖形。

解：

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$							



性質：

1.圖形恆在____軸的_____方，而 $f(x)$_____0

2.圖形過點_______，凹口向_____的圖形

3.以_______為漸近線

4.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為__________函數，圖形由左往右逐漸______

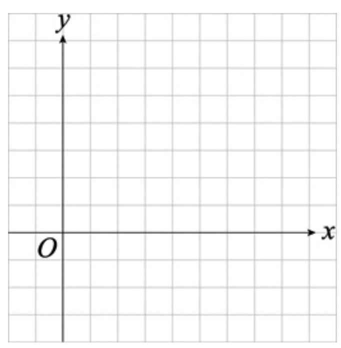
5.圖形在 y 軸右方，與___________恰交一點；

圖形與_____________都恰交一點

例 1.2：利用描點法描繪函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

解：

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$							



性質：

1.圖形恆在____軸的_____方，而 $f(x)$_____0

2.圖形過點_______，凹口向_____的圖形

3.以_______為漸近線

4.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為__________函數，圖形由左往右逐漸______

5.圖形在 y 軸右方，與___________恰交一點；

圖形與_____________都恰交一點

例 1.3：設$(a，b)$是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在函數圖形上？

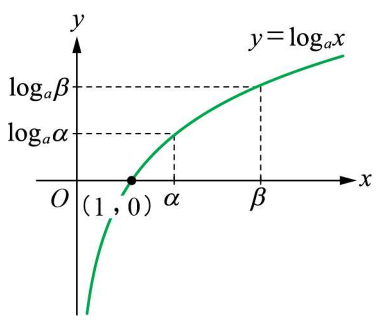
(A) $(1，0)$ (B) $(10a，b+1)$ (C) $(2a，2b)$ (D) $(\frac{1}{a}，1-b)$ (E) $(a^2，2b)$

重點 2：對數函數的遞增、遞減性質

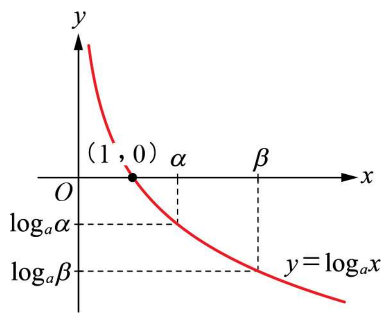
意義：指數函數 $y=f(x)=\log_a x$ 的圖形可得：

(1)當 $a>1$ 時，函數 $y=\log_a x$ 的圖形由左而右逐漸上升，是嚴格遞增函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha<\log_a \beta$

(2)當 $0<a<1$ 時，函數 $y=\log_a x$ 的圖形由左而右逐漸下降，是嚴格遞減函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha>\log_a \beta$



嚴格遞增函數



嚴格遞減函數

重點 3：對數函數的對稱性質

1.定義：點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(-x，y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於 y 軸

點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(x，-y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於 x 軸

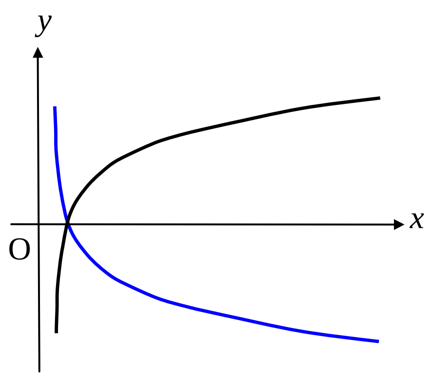
點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(-x，-y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於原點

2.指數函數圖形的對稱性

若點 $A(\alpha，\beta)$在 $y=\log_a x$ 的圖形上，而點 $B(\alpha，-\beta)$在 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形上，則稱 A，B 兩點對稱於 x 軸

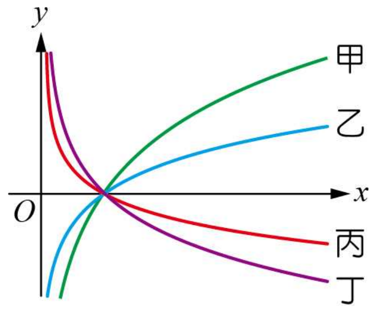
即 $y=\log_2 x$ 的圖形與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 x 軸

例 3.1：試說明 $y=\log_2 x$ 的圖形與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 x 軸，並將兩圖形畫在同一坐標平面上。



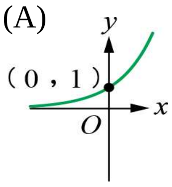
例 3.2：對數函數 $y=\log_2 x$ 、$y=\log_4 x$ 、$y=\log_{\frac{1}{7}} x$ 、$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形如右圖，

試指出右圖之甲、乙、丙、丁分別對應哪一個對數函數？

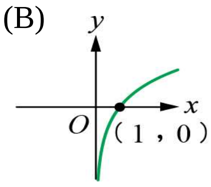


例 3.3：設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則下列各圖形中，哪些可能是對數函數 $y=\log_a x$ 的部分圖形？

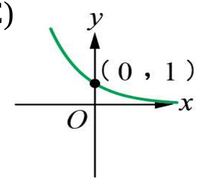
(A)



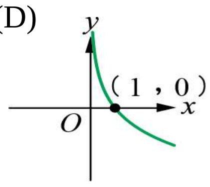
(B)



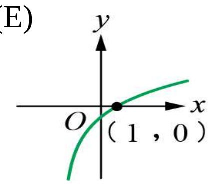
(C)



(D)



(E)



重點 4：對數函數的凹向性質

對數函數圖形 $y=\log_a x$ 的凹向性如下：

1.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為凹向下，如圖 1

2.當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 為凹向上，如圖 2

$a>1$

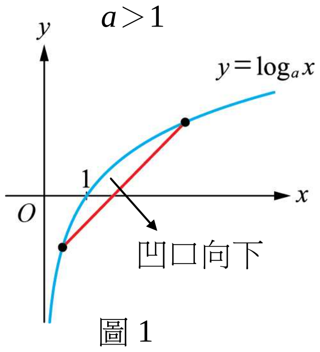


圖 1

$0<a<1$

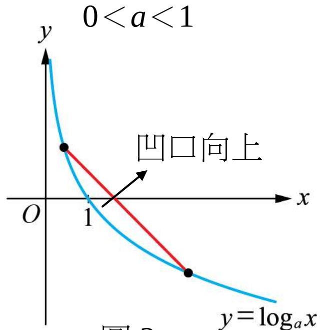
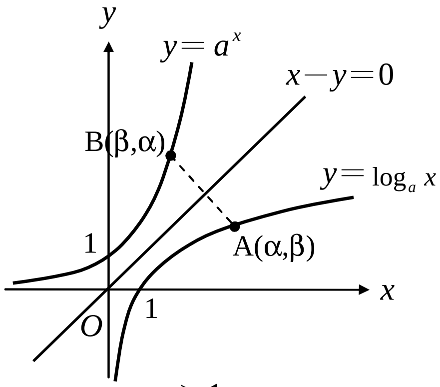


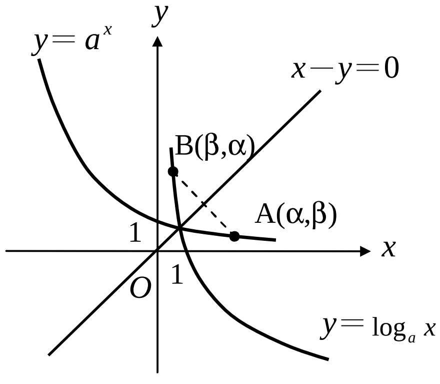
圖 2

重點 5：指數與對數函數的對稱性質

意義：若 $a>0$，$a\neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $x-y=0$，如下圖：

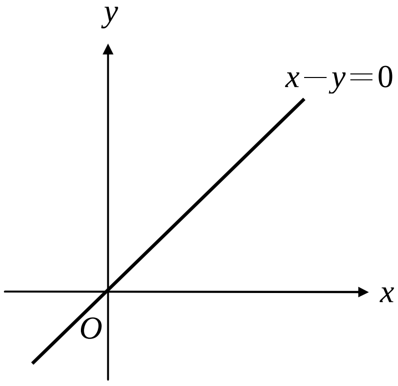


$\underline{a>1}$

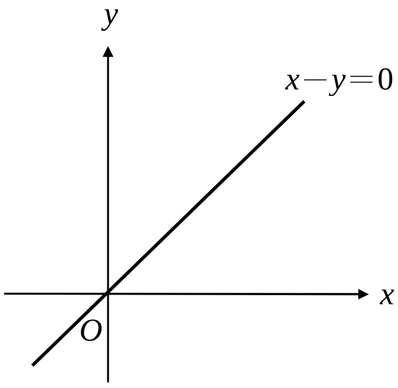


$\underline{0<a<1}$

例 5.1：試在同一坐標上，作指數函數 $y=2^x$ 與對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形，並說明兩者對稱於直線 $x-y=0$。



例 5.2：將函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形畫在同一坐標平面上，觀察此兩圖形是否對稱於直線 $y=x$



重點 6：對數函數圖形的平移

意義：水平平移：對數函數 $y=\log_a x$ 圖形，向右平移 h 單位後得 $y=\log_a(x-h)$

對數函數 $y=\log_a x$ 圖形，向左平移 h 單位後得 $y=\log_a(x+h)$

鉛直平移：對數函數 $y=\log_a x$ 圖形，向上平移 k 單位後得 $y=\log_a x+k$

對數函數 $y=\log_a x$ 圖形，向下平移 k 單位後得 $y=\log_a x-k$

平移密技

上 $y=$ ＋

下 $y=$ －

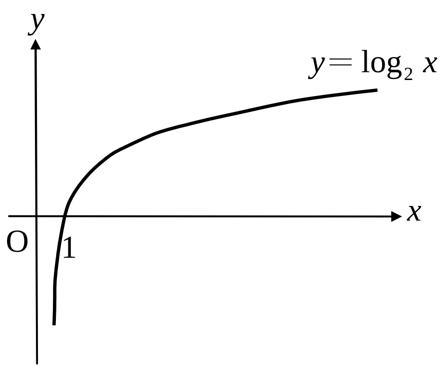
左 $x+$

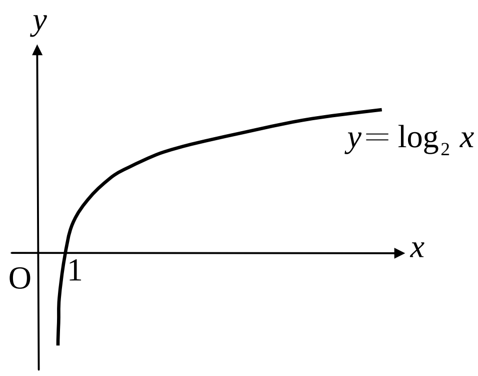
右 $x-$

例 6.1：試利用 $y=\log_2 x$ 的圖形，描繪出下列函數的圖形：

(1) $y=\log_2(x-1)$　　(2) $y=\log_2 4x$

解：(1) $y=\log_2 x \xrightarrow{\quad\quad} y=\log_2(x-1)$　　(2) $y=\log_2 x \xrightarrow{\quad\quad} y=\log_2 4x=$______





例 6.2：將 $y=f(x)=\log_2 x$ 之圖形向右平移 12 單位，再向上平移 2 單位，所得的新函數為 $y=g(x)=\log_2(ax+b)$，試求數對$(a，b)=$______

重點 7：比較對數函數值大小
意義：利用對數的遞增、遞減性質，比較對數函數值之大小

例 7.1：設 $a=\log_2 3$，$b=\log_4 10$， $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$，試比較 a，b，c 三數的大小關係。

重點 8：對數方程式
1.意義：方程式的未知數出現在對數之真數位置時，稱為對數方程式。
2.解對數方程式步驟：
步驟一：對數函數有意義的先決條件為：底數大於 0 且不等於 1，真數大於 0
步驟二：利用對數運算性質，解方程式，得出其解，並驗算符合條件之解
註：對數函數 $f(x)=\log_a x>0$、$f(x)=\log_a x=0$ 與 $f(x)=\log_a x<0$ 解可能成立
3.實數根個數：給定方程式 $f(x)=g(x)$，則方程式實根的個數就是 $y=f(x)$與 $y=g(x)$的圖形交點個數

◎遞增函數
例 8.1：解方程式 $\log(x-1)+\log(2x+1)=1+\log 2$

◎遞減函數
例 8.2：解方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{4}}(3-x)$

◎指數型
例 8.3：解方程式 $\log(10^x+100)=\frac{1}{2}x+1+\log 2$

◎倒數型
例 8.4：解方程式 $\log_{10}x-6\log_x 10=1$

◎相等型

例 8.5：解方程式$(3^{\log x})(x^{\log 3})-12\times 3^{\log x}+27=0$

例 8.6：解指數方程式 $2^{2x+3}=12^{x}$　(利用兩邊取對數)

例 8.7：試求方程式 $x-1=\log_2 x$ 有______個實根？

重點 9：對數不等式

1.意義：對數式中，底數或真數含有未知數的不等式，稱之為對數不等式。

註：對數不等式 $f(x)=\log_a x\neq 0$，包含 $f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$ 四種形式

2.解對數不等式步驟：

步驟一：對數函數有意義的先決條件為：底數大於 0 且不等於 1，真數大於 0

步驟二：利用對數運算之遞增、遞減性質，解不等式，得出其解，並驗算符合條件之解

註：對數函數 $f(x)=\log_a x>0$、$f(x)=\log_a x=0$ 與 $f(x)=\log_a x<0$ 解可能成立

例 9.1：試解下列不等式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x>3$　　(2) $2\log_3(x-2)<\log_3(8-x)$

例 9.2：試解不等式 $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x)<1$