2.3 多項式方程式

一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：i 的定義

1.緣由：滿足 $f(x)=0$ 的 x 值稱為方程式 $f(x)=0$ 的解或根，但是如 $f(x)=x^2+1=0$ 時，則無實數解

2.定義：規定 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$

則 $i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$，即每 4 個一循環

3.性質：(1)若 a 為正實數，則 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

(2)設 a，b 為實數，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{ab} & ,當 a<0 且 b<0 \\ \sqrt{ab} & ,其他\end{cases}$

例 1.1：(1)化簡 $\sqrt{-8}$　　(2)試求 $i\cdot i\cdot i\cdot i$

例 1.2：試化簡下列各式：

(1) i^{17}　　(2) $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$

重點 2：複數(complex number)

1.定義：設 a，b 為實數，$i=\sqrt{-1}$，則可表為 $a+bi$ 形式的數稱為**複數**，以符號 $z=a+bi$ 或 $\omega=a+bi$ 表示

其中 a 稱為此複數的實部，b 稱為此複數的**虛部**

2.性質：設複數 $z=a+bi$，則

(1)若 $b\neq0$，則稱此複數 z 為虛數

(2)若 $a=0$，$b\neq0$，則稱此複數 $z=bi$ 為純虛數

(3)若 $b=0$ 時，複數 $z=a$ 是一個實數

3.複數的相等：若兩複數相等，則實部相等，且虛部相等

若 a，b，c，d 為實數，設 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 為兩複數，若 $z_1=z_2$，則實部 $a=c$，虛部 $b=d$

4.共軛複數(complex conjugate)

(1)設 a，b 為實數，若複數 $z=a+bi$，則 $a-bi$ 稱為複數 z 的**共軛複數**，並以 $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ 表示

(2)複數 z 的共軛再共軛，則為自己，即 $\overline{(\overline{z})}=z$

例 2.1：設 x，y 為實數，若 $x+1-4i=y+yi-2i$，求 x，y 之值。

例 2.2：試求下列複數的共軛複數：

(1) $2+5i$　　(2) $3i$

重點 3：複數的四則運算(加減法運算)

1.設 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 為兩複數，a，b，c，d 為實數，則：

加法：$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法：$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

註：複數作加減法時，實部與虛部分開計算

2.共軛複數的加減法運算

設複數 $z=a+bi$，其共軛複數 $\overline{z}=a-bi$，則：

加法：$z+\overline{z}=2a$ 為實數

減法：$z-\overline{z}=2bi$ 為純虛數

例 3.1：已知複數 $z_1=2-i$，$z_2=3+4i$，求下列各式的值：

(1) z_1+z_2　　(2) z_1-z_2

例 3.2：設 a，b 為實數。若複數$(a+7i)+(3-i)=2-bi$，試求 a，b 之值。

重點 4：複數的四則運算(乘法運算)

1.設 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 為兩複數，a，b，c，d 為實數，則：

乘法：$z_1\times z_2=(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

2.共軛複數的乘法運算

設複數 $z=a+bi$，其共軛複數 $\overline{z}=a-bi$，則 $z\times\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ 為實數

3.複數的四則運算性質：設 z_1，z_2，z_3 為三複數，則：

(1)交換律：$z_1+z_2=z_2+z_1$　　$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

(2)結合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$　　$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$

(3)分配律：$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

(4)消去律：若 $z_1+z_3=z_2+z_3$，則 $z_1=z_2$

若 $z_1\cdot z_3=z_2\cdot z_3$，$z_3\neq 0$，則 $z_1=z_2$

例4.1：計算下列複數：

(1) $(4+3i)(2-i)$　　(2) $(2+3i)(2-3i)$　　(3)$(1+i)^4$

重點 5：複數的四則運算(除法運算)

1.意義：複數的除法運算原則，是將分子分母同乘上分母的共軛複數，使得分母成為**正實數**

設 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 為兩複數，a，b，c，d 為實數，則：

除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

2.設 a，b 為實數，$b\neq 0$，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{a}{b}} & \text{，當} a>0 \text{且} b<0 \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} & \text{，其他}\end{cases}$

例 5.1：規定 $\sqrt{-1}=i$，計算下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}$

例 5.2：計算下列複數：

(1) $\dfrac{1}{2-i}$　　(2) $\dfrac{1+i}{2-4i}$

例 5.3：已知 a，b 是實數，且 $\dfrac{1+2i}{a+bi}=3-i$，求 a，b 的值。

重點 6：共軛複數的運算性質

運算性質：設 z，w 為複數，則

(1) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$　　(2) $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$　　(3) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$，$w\neq 0$　　(5) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$，其中 n 為正整數

註：共軛複數的運算：先做四則運算再取共軛，與先取共軛再做四則運算的結果相同

例 6.1：已知複數 z 的實部為 2，複數 $\dfrac{1}{z}$ 的虛部為 $\dfrac{1}{4}$，求 $z\cdot\overline{z}$ 的值。

重點 7：一元二次方程式的解

1.公式解：設一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，a，b，c 為實數，且 $a\neq 0$，則 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

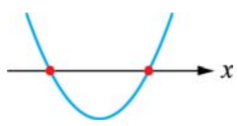
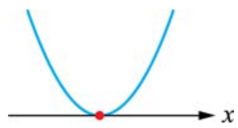
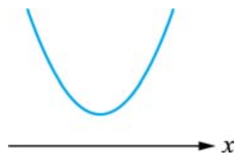
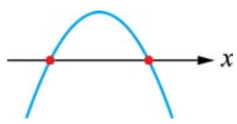
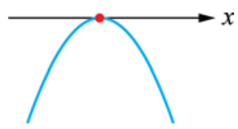
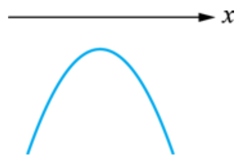
2.兩根的性質：設 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式為 $D=b^2-4ac$，則：

(1)若有兩相異實根，則 $D=b^2-4ac>0$

(2)若有兩相等實根(重根)，則 $D=b^2-4ac=0$

(3)若有兩共軛虛根，則 $D=b^2-4ac<0$

3.一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根的性質與 x 軸相交情形：

根的性質 / 開口	$D=b^2-4ac>0$（兩相異實根）	$D=b^2-4ac=0$（兩相等實根）	$D=b^2-4ac<0$（兩共軛虛根）
$a>0$ 向上			
$a<0$ 向下			

例 7.1：試解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+4x+13=0$　　(2) $x^2+x+1=0$

例 7.2：設 k 為實數，方程式 $x^2+x-k=0$，試求方程式的兩根為下列特性質時 k 的範圍：

(1)兩相異實根　　(2)兩相等實根　　(3)兩共軛虛根

重點 8：一元二次方程式的根與係數關係

1.意義：設一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，其兩根為 α，β，

則：兩根和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，兩根乘積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2.造方程式：以 α，β 為兩根，則一元二次方程式為 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

例 8.1：設 α，β 為 $x^2+2x-4=0$ 的兩根，試求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　　(2) $\alpha^2+\beta^2$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

例 8.2：設二次方程式 $x^2+2x+4=0$ 的兩根是 α 與 β，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　(3) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$

例 8.3：已知 $\alpha=3+\sqrt{2}$ 是實係數一元二次方程式 $x^2-4x+k=0$ 的一個根，試求：

(1)此方程式的另一根　(2) k 值

例 8.4：試求以 $\alpha=1+2i$，$\beta=1-2i$ 為二根，且領導係數為 1 的二次方程式。

重點 9：代數基本定理

定理：任一個次數大於 0 的多項式方程式，至少存在有一個**複數根**，即 n 次方程式有 n 個根

若 n 為一正整數，則 n 次方程式，恰有 n 個複數根

註：德國的數學家高斯 (Carl Friedrich Gauss，1777~1855)在博士論文中證明了代數基本定理

例 9.1：試求出 $x^3-1=0$ 的三個根

Ex9.1：試求出 $x^4-1=0$ 的四個根

重點 10：整係數多項式方程式的一次因式檢驗法(有理根檢驗法)(牛頓定理)

定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一個整係數 n 次多項式，$a_n\neq 0$，

若 $f(x)$有一次因式 $ax-b$，其中 a，b 為互質的整數，則 a 是 a_n 的因數且 b 是 a_0 的因數

註：一次因式檢驗法(牛頓定理)的**逆定理**不一定成立

註：若用一次因式檢驗法找不到因式，表示 $f(x)$沒有一次因式。但是 $f(x)$仍然可能可以因式分解，只是分解出來的因式都超過一次。

例 10.1：(1)用一次因式檢驗法分解 $f(x)=x^3+3x^2+4x+4$

(2)解方程式 $x^3+3x^2+4x+4=0$

例 10.2：設 a，b 皆為整數，$f(x)=3x^4+5x^3+ax^2+bx-6$，則下列何者一定不為 $f(x)$的因式？

(1) $3x+1$ (2) $3x-2$ (3) $2x+1$ (4) $x+2$ (5) $x-3$

例 10.3：用一次因式檢驗法分解 $f(x)=x^4+3x^3+3x-1$

重點 11：實係數多項式方程式虛根成雙定理

定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一個**實係數** n 次多項式，$a_n\neq 0$，

若已知 $z=a+bi$ 是 $f(x)=0$ 的一虛根，a，b 是實數且 $b\neq 0$，

則 $\bar{z}=a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的一虛根

例 11.1：設 a，b 為實數，且多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ 有一根為 $1+2i$，試求 a，b 之值。

例 11.2：設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$ (其中 $i^2=-1$)，請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x)=0$ 的根？(101 學測)

(1) $-i$ (2) 0 (3) 1 (4) -5 (5)

例 11.3：設 $f(x)=5x^4-21x^3+30x^2-8x+8$，試求 $f(2+i)$。

例 11.4：設 $f(x)$為滿足下列條件的最低次實係數多項式：$f(x)$最高次項的係數為 1，且 $3-2i$、i、5 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解(其中 $i^2=-1$)。則 $f(x)$之常數項為_____ (99 學測)

重點 12：奇數次實係數多項式方程式實數根存在定理

1.定理：若 $f(x)=0$ 為**奇數次**的實係數多項式方程式，則 $f(x)=0$ 至少存在有一個實根

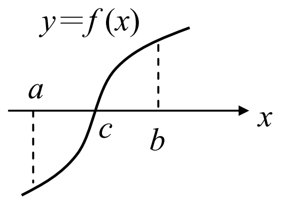
2.性質：利用虛根成雙定理、除法原理，可求得函數 $f(x)$的值

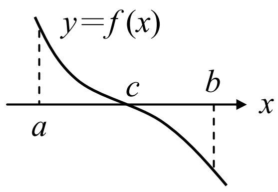
例 12.1：解方程式 $x^3+x^2-5x-2=0$。

重點 13：勘根定理

定理：設 $f(x)=0$ 是一個實係數多項式方程式，若 a 與 b 是兩個相異實數，且 $f(a)f(b)<0$，
則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少存在有一個實根。

即設 $f(x)$是一實係數多項式，a，b 是實數，$a<b$，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則存在 c 介於 a，b 之間，使 $f(c)=0$





註：勘根定理乃是尋找 $f(x)=0$ 的實根的近似位置之方法

註：$f(a)\cdot f(b)<0$，表示 a，b 之間可能有 1，3，5，7，…等奇數個根，保證至少存在 1 根
若 $f(a)\cdot f(b)>0$，表示 a，b 之間可能有 0，2，4，6，…等偶數個根，無法保證至少存在 1 根

註：二、三、四次多項式方程式皆有公式解，天才數學家阿貝爾(Niels Henrik Abel，1802~1829)
證明了五次或五次以上的方程式**沒有**公式解

例 13.1：設 $f(x)=x^3-3x-1$，試判斷 $f(x)=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

例 13.2：試證明 $x^3=2$ 恰好只有一個正根。

重點 14：分式方程式

定義：可化為型如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 的方程式，其中 $f(x)$，$g(x)$ 皆為多項式，稱為分式方程式。

而 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 的解為從 $f(x)=0$ 的解中剔除掉使分母 $g(x)=0$ 的解

例 14.1：解方程式 $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$