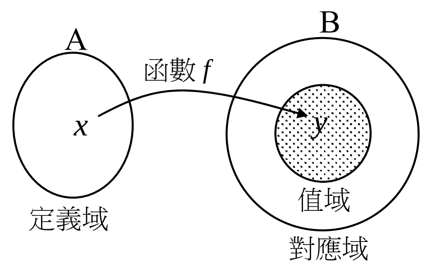
Ch 2.1 簡單的多項式函數　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：函數的概念

1.定義：設 x，y 為兩個變數。若對於每一個 x 所取的值，都可找到唯一一個 y 值與 x 對應，則稱 y 是 x 的函數。
一般使用 f 代表這個函數，即函數可寫成 $y=f(x)$

註：函數符號 $f(x)$由瑞士數學家尤拉(1707~1783)在 1734 年首先採用



2.變數：在函數的定義中，x 稱為函數的自變數，y 稱為應變數

定義域：自變數 x 所有可能值的全體(集合 A)，稱 A 為函數的定義域

對應域：應變數 y 所有可能值的全體(集合 B)，稱 B 為函數的對應域

函數值：給定 $x=a$，代入函數 $f(x)$後得到 $f(a)$稱為函數在 $x=a$ 的函數值

值域：所有函數值的全體稱為這個函數值域

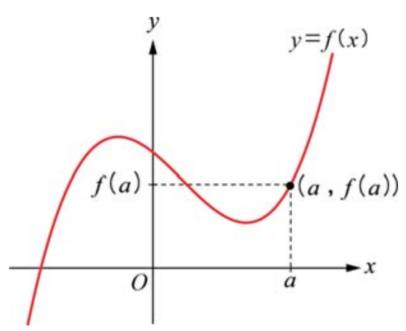
例 1.1：小璿(璇)寫了一個程式，輸入一個實數 x，輸出其平方數 y。則：

(1)試說明 y 是 x 的函數，並將此函數寫成 $y=f(x)$的形式。

(2)求出這個函數的定義域和值域。

重點 2：函數的通論

1.意義：對於函數 $f(x)$，利用描點法，將 x 當作橫坐標，y 當作縱坐標，
將所有的點(x，$f(x)$)描繪在坐標平面上，得函數的圖形，如右圖。
函數的圖形有助於我們更加理解函數的特性。



2.多項式函數與圖形的概念：

(1)形如 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x+a_0$ 稱為多項式函數。
其中 n 是非負整數，a_k 為函數 $f(x)$的係數，$k=0$，1，⋯，n

(2)若 $a_n\neq 0$，則稱 n 為多項式函數 $f(x)$的次數，簡記為 $\deg f(x)=n$

3.多項式函數的類型：(依多項式函數 $f(x)$的次數分類)

(1)常數函數：$f(x)=c$，c 為常數，其圖形為水平直線

(2)一次函數：$f(x)=ax+b$，其中 $a\neq 0$，其圖形為一直線(斜直線)

註：常數函數與一次函數，合稱為線型函數

(3)二次函數：$f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$，其圖形為拋物線

(4)三次與四次函數(只討論單項式)：$f(x)=x^3$，與 $f(x)=x^4$

重點 3：線型函數(常數函數、一次函數)通論

意義：設 m，$k\in$R，形如 $f(x)=mx+k$ 的函數，稱為線性函數，其中包含：

(1)一次函數：若 $m\neq 0$，$f(x)=mx+k$ 稱為一次函數，其圖形為一斜直線

(2)常數函數：若 $m=0$，$f(x)=k$ 稱為常數函數，其圖形為一水平直線

註：常數函數通式為 $f(x)=k$，k 為常數，其圖形為一水平直線，此水平直線必通過點(0，k)

一次函數 $f(x)=mx+k$，$m\neq 0$，其圖形為一斜直線，且當 $k=0$ 時，此直線必通過原點(0，0)

例 3.1：描繪常數函數 $f(x)=2$ 的圖形。

重點 4：一次函數

1.一次函數：函數 $f(x)=ax+b$，其中 $a\neq 0$，稱為一次函數，a，b 分別稱為 $f(x)$的一次項係數及常數項，其圖形為一直線。a 稱為此函數圖形(一直線)的斜率，b 稱為 y 截距，如圖 4.1

當 $b=0$ 時，圖形通過原點(0，0)，如圖 4.2

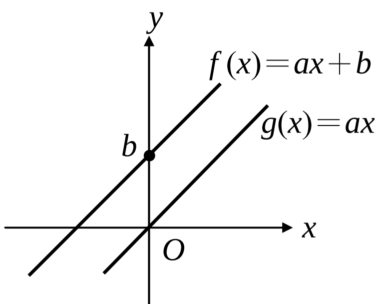


圖 4.1

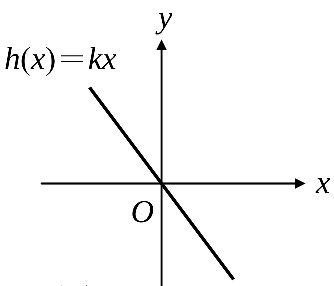


圖 4.2

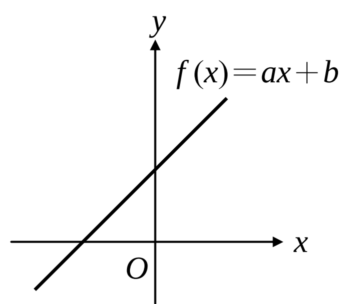


圖 4.3　斜率 $a>0$

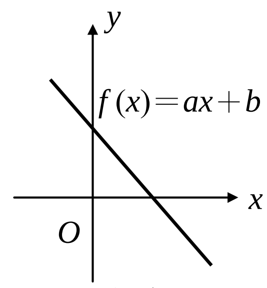


圖 4.4　斜率 $a<0$

2.一次函數特性：函數 $f(x)=ax+b$，$a\neq 0$

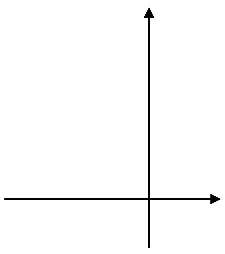
(1) $a>0$ 時，圖形是右上(左下)傾斜，稱此直線的斜率 $a>0$，如圖 4.3

(2) $a<0$ 時，圖形是右下(左上)傾斜，稱此直線的斜率 $a<0$，如圖 4.4

(3) $|a|$ 值越大，直線越傾斜

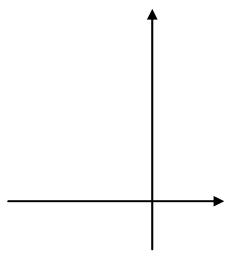
(4) $y=ax+b$ 和 $y=ax$ 平行，且與 y 軸交於$(0，b)$，如圖 4.1

例 4.1：描繪函數 $y=x+2$ 的圖形。

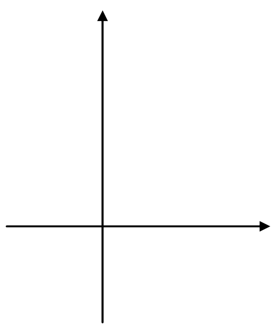


例 4.2：已知函數 $f(x)=2x+6$，則：

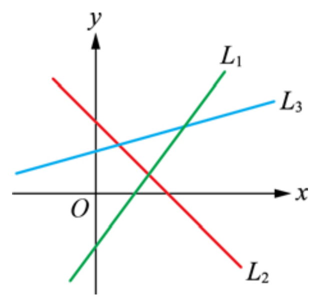
(1)試求 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$　　(2)描繪函數 $f(x)$的圖形



例 4.3：分別描繪函數 $y=x$，$y=2x$，$y=3x$ 的圖形。



例 4.4：右圖中直線 L_1、L_2、L_3 的斜率分別為 a_1、a_2、a_3，則：
(1)試比較 a_1、a_2、a_3 的大小並判斷正負。
(2)比較 L_1、L_2、L_3 的 y 截距 b_1、b_2、b_3 的大小並判斷正負。



例 4.5：設 $f(x)$是一次函數。已知 $f(1)=-1$ 且其函數圖形的 y 截距為 2，試求：
(1)函數 $f(x)$圖形的斜率 (2) $f(2)$ (3)函數 $f(x)$的圖形與 x 軸的交點

例 4.6：設 $f(x)$為一次函數，且 $f(1)=5$，$f(2)=8$，求 $f(3)$的值。

例 4.7：設 $f(x)$是一次函數，若 x 值每增加 3 單位時，其對應的 y 值就減少 6 單位，且 $f(1)=3$，則：
(1)求 $f(x)$ (2)畫出 $y=f(x)$的圖形

例 4.8：某次考試，全班最高分 48 分，最低分 28 分，於是老師想用一次函數 $f(x)=ax+b$ 來調整分數，使 48 分變成 90 分，28 分變成 60 分，試回答下列問題：
(1)若原來成績為 38 分，則調整後成績變成幾分？
(2)若調整後成績為 84 分，則原來成績為多少分？

重點 5：二次單項函數

1.意義：設 a 為實數，形如 $f(x)=ax^2$，$(a\neq 0)$的二次多項式單項函數，或稱為二次函數。其圖形是一個拋物線，其中 a 稱為 x^2 項係數(或二次項係數，領導係數)。

2.單項二次函數 $f(x)=ax^2$，$a\neq 0$，則：

(1)圖形為拋物線，若 $a>0$，圖形開口朝上；若 $a<0$，圖形開口朝下

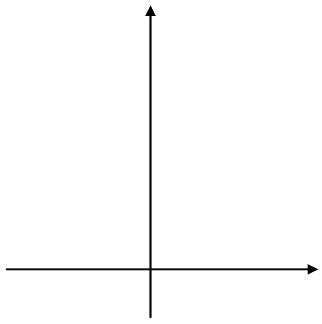
(2)其圖形頂點坐標為(0，0)，且以 y 軸為對稱軸

(3)若 $|a|$ 愈大，圖形開口愈小

例 5.0：試利用描點法畫 $y=x^2$ 的函數圖形。

解：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y							



例 5.1：利用描點作圖的方法，在同一個坐標平面上畫出下列三個函數圖形：

(1) $f(x)=x^2$　　(2) $g(x)=2x^2$　　(3) $h(x)=-2x^2$

解：(1)

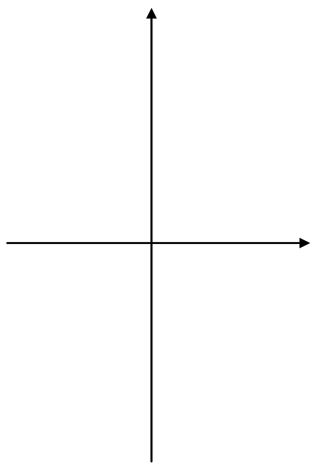
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

(2)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

(3)

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$					



重點 6：二次單項函數圖形的平移

二次函數 $f(x)=ax^2$，$a\neq 0$ 圖形的平移，設 h，$k>0$

(1)由 $f(x)=ax^2$ 的圖形向上平移 k 個單位，得 $g(x)=ax^2+k$ 的圖形

(2)由 $f(x)=ax^2$ 的圖形向下平移 k 個單位，得 $g(x)=ax^2-k$ 的圖形

(3)由 $f(x)=ax^2$ 的圖形向左平移 h 個單位，得 $g(x)=a(x+h)^2$ 的圖形

(4)由 $f(x)=ax^2$ 的圖形向右平移 h 個單位，得 $g(x)=a(x-h)^2$ 的圖形

<u>心得</u>：

對 y：$\begin{cases}\text{向上}\Rightarrow y=+\\ \text{向下}\Rightarrow y=-\end{cases}$

對 x：$\begin{cases}\text{向左}\Rightarrow x+\\ \text{向右}\Rightarrow x-\end{cases}$

例6.1：試利用$f(x)=2x^2$ 的圖形畫出下列二次函數圖形：

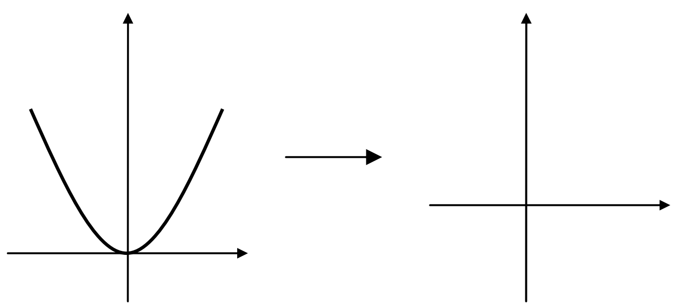
(1) $g_1(x)=2x^2-1$　　(2) $g_2(x)=2(x-1)^2$

$$y=2x^2 \xrightarrow{\text{向下平移 1 單位}} y=2x^2-1$$

解：(1) $f(x)=2x^2$

x	…	-1	0	1	2	…	a
$f(x)$	…						

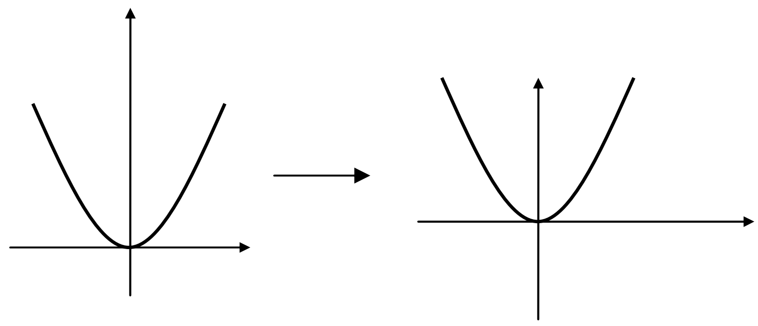
x	…	-1	0	1	2	…	a
$g_1(x)$	…						



(2) $g(x)=2(x-1)^2$

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	$\cdots$	$a+1$
$g_2(x)$	$\cdots$							

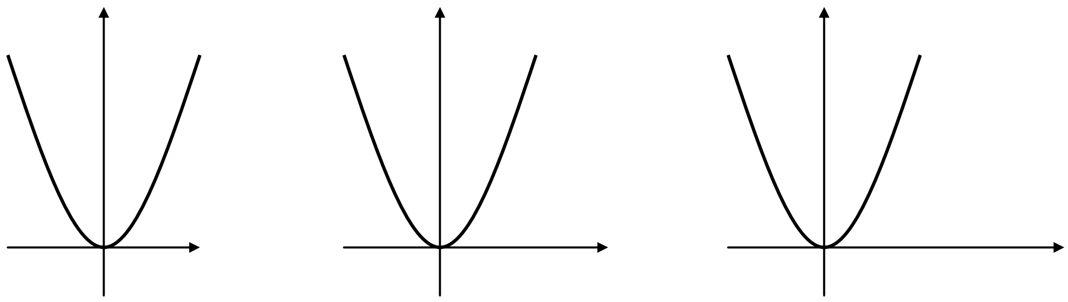
$y=2x^2 \xrightarrow{\text{向右平移 1 單位}} y=2(x-1)^2$



例 6.2：畫出 $y=(x-2)^2+3$ 的圖形。

解：

$y=x^2 \xrightarrow{\text{向右平移 2 單位}} y=(x-2)^2 \xrightarrow{\text{向上平移 3 單位}} y=(x-2)^2+3$



重點 7：二次函數的最大值與最小值

1.意義：設 a，b，c 為實數，形如 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的多項式函數，稱為二次函數。其圖形是一個拋物線

其中 a 稱為 x^2 項係數(或二次項係數)，b 稱為 x 項係數(或一次項係數)，c 稱為常數項。

2.二次函數特性：

(1)利用配方法：$f(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a[x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2]-a(\frac{b}{2a})^2+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

即 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形可由 $f(x)=ax^2$ 的圖形向右平移 $\frac{-b}{2a}$，向上平移 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 得之

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ 的頂點坐標為$(\frac{-b}{2a}，\frac{4ac-b^2}{4a})$，對稱軸為 $x=\frac{-b}{2a}$

(3)若 $a>0$，圖形為開口朝上的拋物線；則當 $x=\frac{-b}{2a}$時，函數 $f(x)$有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

若 $a<0$，圖形為開口朝下的拋物線；則當 $x=\frac{-b}{2a}$時，函數 $f(x)$有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

例 7.1：試利用配方法，將下列各多項式配方：

(1) x^2-2x+7　　(2) $-2x^2-3x+4$

例 7.2：求出下列各二次函數的函數值的最大或最小值，及在何處發生。

(1) $2x^2+4x+5$　　　　(2) $-2x^2-4x-6$

重點 8：在限制範圍中二次函數的最大值與最小值

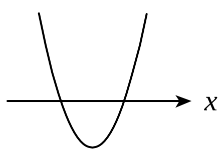
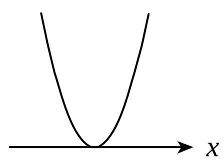
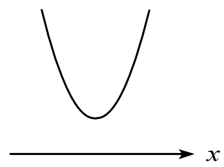
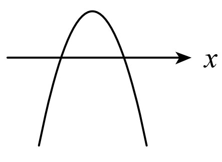
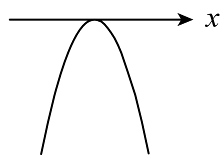
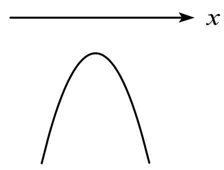
意義：二次函數 $f(x)$中，如果 x 的範圍有限制，則利用圖形求得在限制的範圍中 $f(x)$的最大值或最小值

例 8.1：試求二次函數 $f(x)=x^2-4x-1$ 在下列範圍中的最大值及最小值：

(1) $0\leq x\leq 4$　　　　(2) $3\leq x\leq 5$

重點 9：二次函數圖形的分類、函數值的恆正與恆負

1.二次函數圖形的分類

判別式	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
與 x 軸相交情形	交於兩點	交於一點	不相交
$a>0$ 開口向上			
$a<0$ 開口向下			

2.函數值的恆正與恆負

(1)函數值恆正表示函數圖形皆在 x 軸之上方，其條件為開口向上 $a>0$、判別式 $b^2-4ac<0$

(2)函數值恆負表示函數圖形皆在 x 軸之下方，其條件為開口向上 $a<0$、判別式 $b^2-4ac<0$

例 9.1：試說明 $f(x)=x^2+x+1$ 的函數值恆為正數。

例 9.2：若二次函數 $f(x)=-x^2-3x+k$ 的函數值恆為負數，試求 k 的範圍。

重點 10：單項三次及四次函數

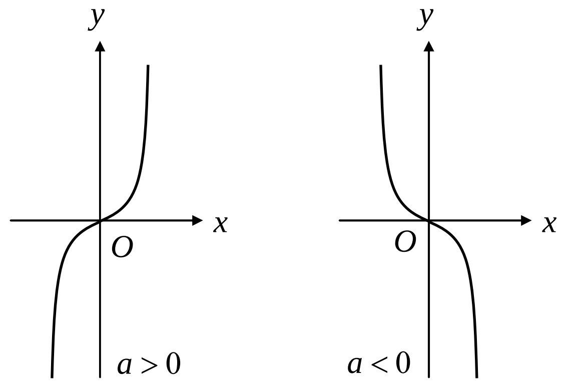
1.單項三次函數：函數 $f(x)=ax^3$，$a\neq 0$ 稱為單項三次函數

(1)當 $a>0$ 時，$y=ax^3$ 的圖形愈往右邊的點，會愈往上攀升

當 $a<0$ 時，$y=ax^3$ 的圖形愈往右邊的點，會愈往下降低

(2)函數圖形以原點(0，0)為對稱中心的「點對稱」圖形

(3) $y=ax^3$ 的圖形與 $y=-ax^3$ 的圖形對稱於 x 軸



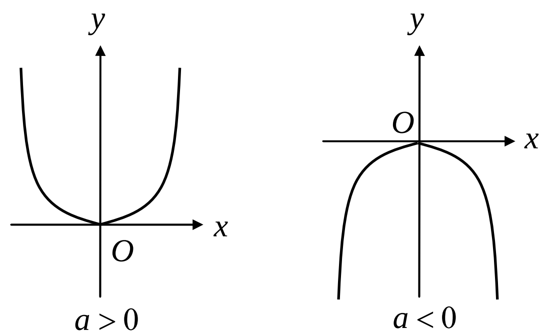
2.單項四次函數：函數 $f(x)=ax^4$，$a\neq 0$ 稱為單項四次函數

(1)當 $a>0$ 時，$y=ax^4$ 的圖形除了原點外都在 x 軸的上方

當 $a<0$ 時，$y=ax^4$ 的圖形除了原點外都在 x 軸的下方

(2)函數圖形以 y 軸為對稱中心的「軸對稱」圖形

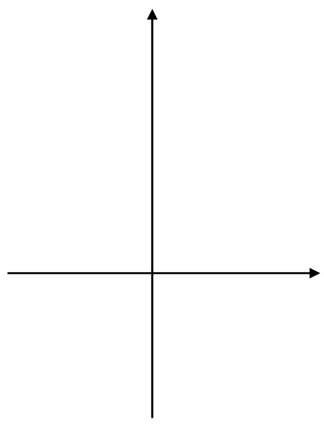
(3) $y=ax^4$ 的圖形與 $y=-ax^4$ 的圖形對稱於 x 軸



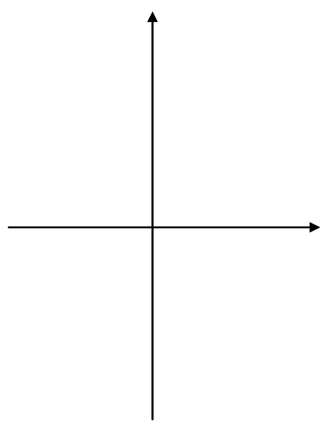
例 10.1：試利用描點的方式繪出 $f(x)=x^3$ 的圖形。

解：利用描點的方式繪出 $f(x)=x^3$ 的圖形

x	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2
$f(x)$							

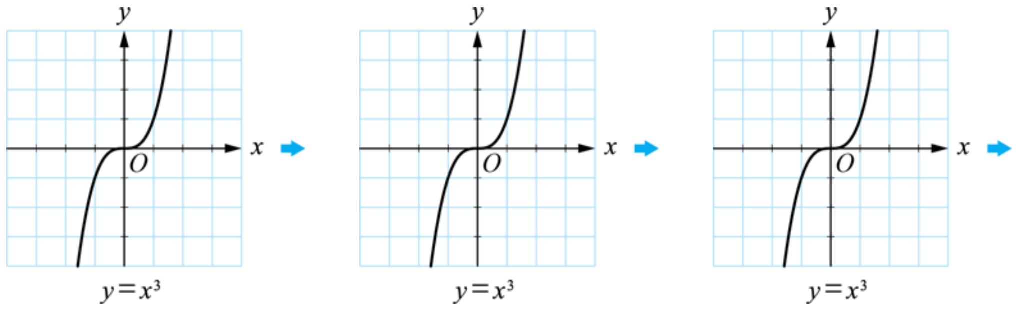


例 10.2：試利用描點的方式繪出 $f(x)=2x^3$，$f(x)=x^3$，$f(x)=-2x^3$ 的圖形。



例 10.3：試說明如何利用 $f(x)=x^3$ 的圖形來畫出 $g(x)=(x+2)^3+1$ 的圖形。

解：$g(x)=(x+2)^3+1$ 的圖形是 $f(x)=x^3$ 的圖形向左平移 2 單位，再向上平移 1 單位得之



例 10.4：試利用描點的方式繪出 $f(x)=x^4$ 的圖形。

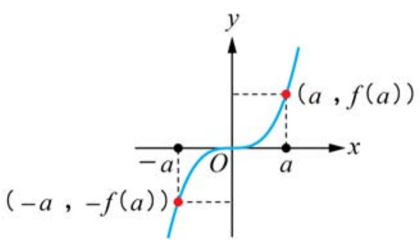
解：利用描點的方式繪出 $f(x)=x^4$ 的圖形

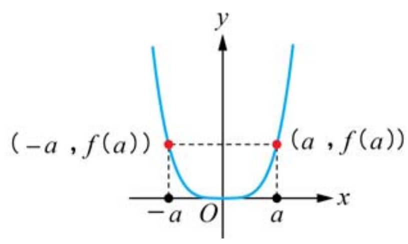
x	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f(x)$							

重點 11：奇函數與偶函數

1.奇函數定義：若 $f(-x)=-f(x)$，則稱函數 $f(x)$為奇函數，其函數圖形對稱於原點。$f(x)=ax^3$ 是奇函數

2.偶函數定義：若 $f(-x)=f(x)$，則稱函數 $f(x)$為偶函數，其函數圖形對稱於 y 軸。$f(x)=ax^4$ 是偶函數





例 11.1：試說明 $f(x)=3x^4$ 是偶函數。