Ch 1.2 數線上的幾何　　　　　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：數線上兩點距離公式與分點坐標公式

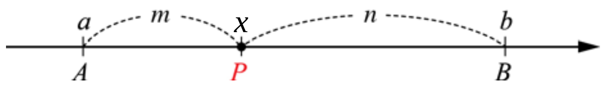
1.坐標：數線上每一點 P 對應到一個實數 x，稱為這個點的坐標，以 P(x)表示

2.距離公式：設兩點 A 與 B 的坐標分別為 a 與 b，即 A(a)，B(b)，則 $\overline{AB}=|a-b|$ 就是 A 與 B 兩點的距離

3.內分點公式：

設數線上兩點 A(a)，B(b)，且 $a<b$，點 P(x)介於 A，B 兩點之間，且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ ＝m：n，如下圖

則 P 點的坐標為 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$



註：若 m：n＝1：1，則點 P 是 $\overline{AB}$ 的中點，得到 $\overline{AB}$ 的中點坐標公式為 $\dfrac{a+b}{2}$，即 P($\dfrac{a+b}{2}$)

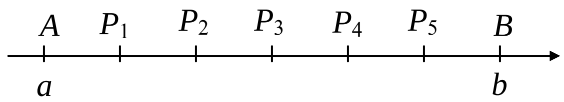
例 1.1：(1)設 A(－2)，B(4)為數線上兩點。若點 P 介於 A，B 兩點之間且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ ＝3：5，求 P 點的坐標。

(2)設 A(－2)，B(4)為數線上兩點。若點 A 介於 P，B 兩點之間且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ ＝3：5，求 P 點的坐標。

例 1.2：設 $a<b$，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 分別是 a，b 間的 5 個等分點，如圖所示：

(1) $\dfrac{a+5b}{6}$，$\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{2a+b}{3}$ 分別是哪些點的坐標？

(2)比較 $\dfrac{a+5b}{6}$，$\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{2a+b}{3}$ 三數的大小。



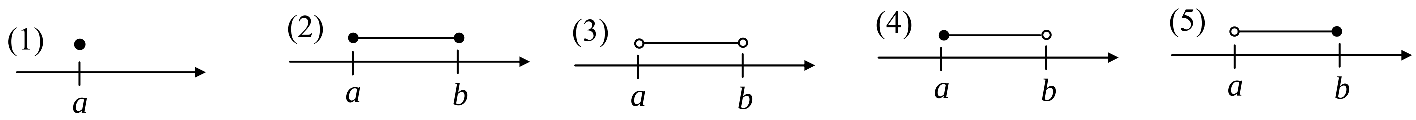
例 1.3：設 A(3)，B(7)為數線上兩點。若 P，Q 兩點將線段 AB 三等分且 P＜Q，試求 P，Q 兩點的坐標。

重點 2：數線上坐標的表示法

1.數線上 P(a)表是一點，其幾何意義如圖(1)

2.閉區間[a，b]表示 $a\le x\le b$，其幾何意義如下圖(2)

3.開區間(a，b)表示 $a<x<b$，其幾何意義如下圖(3)

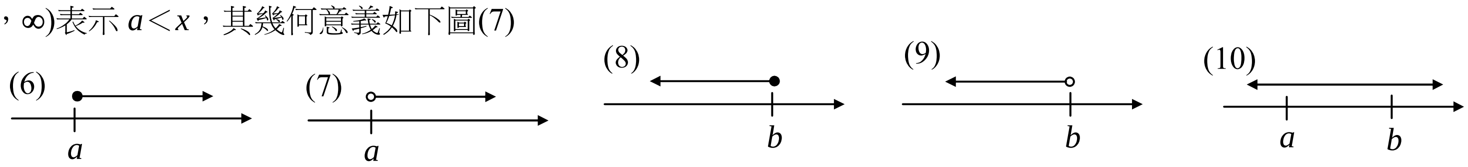


4.半開區間[a，b)表示 $a\le x<b$，其幾何意義如上圖(4)

　半開區間(a，b]表示 $a<x\le b$，其幾何意義如上圖(5)

5.[a，∞)表示 $a\le x$，其幾何意義如下圖(6)

　(a，∞)表示 $a<x$，其幾何意義如下圖(7)



6. ($-\infty$，b]表示 $x\le b$，其幾何意義如上圖(8)

　($-\infty$，b)表示 $x<b$，其幾何意義如上圖(9)

7. ($-\infty$，∞)表示 $x\in$R (即整條數線)，其幾何意義如上圖(10)

例2.1：在數線上標出以下範圍：

(1) $x=2$　　(2) $x>2$　　(3) $x\ge 2$　　(3) $-1\le x<2$

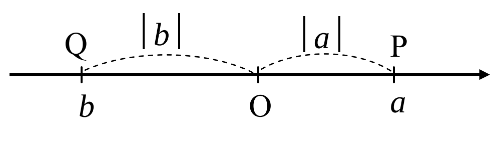
例 2.2：在數線上標出以下範圍：

(1) $x>2$ 或 $x<-3$　　(2) $x>0$ 且 $x\le 3$　　(3) $x<-1$ 且 $x>2$　　(4) $x<3$ 或 $x>0$

重點 3：數線上兩點的距離

1.絕對值的定義：在數線上，實數點 a 與原點 O 之距離，記作$|a|$，讀作 a 的絕對值(或絕對值 a)

　對實數 a，則$|a|=\begin{cases}當 a\ge 0,則|a|=a\\ 當 a<0,則|a|=-a\end{cases}$



註：$|a|$表示數線上點 P(a)與原點的距離

　　$|a-b|$就是 P(a)與 Q(b)兩點的距離

2.絕對值性質：

(1) $|a|\ge 0$　　(2)$|a|=|-a|\ge 0$　　(3)$|a|=0\Leftrightarrow a=0$

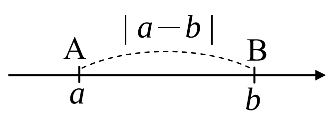
(4)$|a|^2=a^2$　　(5) $|ab|=|a|\,|b|$　　(6)$|a|\le|b|\Leftrightarrow a^2\le b^2$

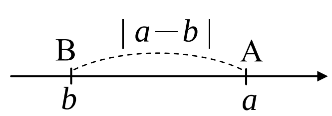
(7)若 $b\ne 0$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　　(8)三角不等式$|a+b|\le|a|+|b|$

3.設數線上兩點 A 與 B 的坐標分別為 a 與 b (以符號 A(a)，B(b)表示)，

　則 A，B 兩點的距離定義為$|a-b|=|b-a|$，以$\overline{AB}$表示，如下圖

註：(1)若 $a\ge b$，則$\overline{AB}=|a-b|=a-b$





　　(2)若 $a<b$，則$\overline{AB}=|a-b|=b-a$

例 3.1：(1)說明$|x|=4$的幾何意義。

(2)解$|x|=4$

例3.2：試說明下列各式的幾何意義：

(1) $|4-2|$　　(2) $|4+2|$　　(3) $|a+1|+|a-3|$

重點 4：含絕對值的一次方程式與不等式

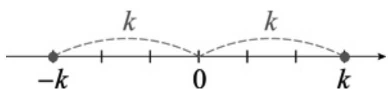
1.意義：利用幾何的想法來思考(距離)，或利用代數的方式來思考(去掉絕對值要考慮正負)

2.一次方程式：含有未知數 x 的等式，稱為方程式；「解方程式」就是要求出滿足方程式之未知數 x 的值

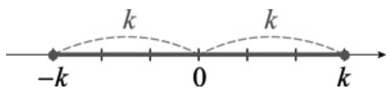
一次不等式：有不等號(≠)的式子，稱為不等式；「解不等式」就是要求出滿足不等式之所有未知數的值(範圍)

3.一次方程式與不等式的解：設 k 是正實數

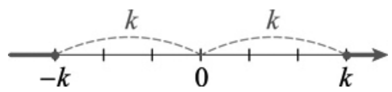
(1)若$|x|=k$，則 $x=k$ 或 $x=-k$



(2)若$|x|\le k$，則$-k\le x\le k$



(3)若$|x|\ge k$，則 $x\ge k$ 或 $x\le -k$



例 4.1：解下列方程式，並將解描繪在數線上：

(1) $|x|=6$　　(2) $|x+3|=4$

例 4.2：解下列不等式：

(1) $|x|<3$　　(2) $|x|\ge 3$

例 4.3：解下列不等式：

(1)$|x+2|\ge 4$　　(2) $|x-1|<2$

例 4.4：解不等式$|x+2|+|x-3|>7$，並將解描繪在數線上。

例 4.5：設不等式 $f(x)=|x+2|+|x-3|$

(1)試作 $f(x)$的圖形

(2)若 $f(x)=|x+2|+|x-3|\geq k$，試求 k 之值

(3)若 $f(x)=|x+2|+|x-3|=k$ 無解，試求 k 之值

例 4.6：解下列各不等式：

(1) $\begin{cases}|x-3|<2\\|-x+1|<1\end{cases}$ (2) $1\leq|2x-1|<5$

例 4.7：解不等式 $|x-5|>|2x-4|$

重點 5：三角不等式

定義：設 a ，b 為實數，則 $|a|+|b|\geq|a+b|$ 稱為三角不等式

例 5.1：設 x 為實數，求 $|x-2|+|x+1|$ 的最小值。