

習題 3-1 解答

一、基本題

1. 試求 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12 這 8 個數的算術平均數、變異數與標準差

解 算術平均數 $\mu = \frac{1+4+5+7+8+9+10+12}{8} = 7$

變異數 $\sigma^2 = \frac{1}{8}((1-7)^2 + (4-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (10-7)^2 + (12-7)^2)$
 $= 11,$

(或是變異數 $\sigma^2 = \frac{1}{8}(1^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2) - 7^2 = 11.$)

標準差 $\sigma = \sqrt{11}$

2. 某班平時測驗的成績統計如下表，試求平均分數

分數	100	90	80	70	60	50	40	30
人數	1	3	7	4	2	2	0	1

解 平均分數 $\mu = \frac{100 \times 1 + 90 \times 3 + 80 \times 7 + 70 \times 4 + 60 \times 2 + 50 \times 2 + 40 \times 0 + 30 \times 1}{20} = 73$ (分)

3. 下表是 107 學年度學科能力測驗英文科級分人數累計表。定義頂標、前標、均標、後標、底標分別為第 88、75、50、25、12 百分位數考生的級分。試問此次考試的英文科五標各為幾級分？

級分	人數	累計人數
15	7,407	134,277
14	13,220	126,870
13	12,992	113,650
12	13,365	100,658
11	11,971	87,293
10	9,741	75,322
9	9,566	65,581
8	8,886	56,015
7	7,715	47,129
6	8,332	39,414
5	9,146	31,082
4	9,556	21,936
3	10,426	12,380
2	1,890	1,954
1	60	64
0	4	4



(資料來源：大學入學考試中心)

解 第 88 百分位數的人數約在 $134277 \times 88\% \approx 118163.76$ 處，經查表得頂標為 14 級分
 第 75 百分位數的人數約在 $134277 \times 75\% = 100707.75$ 處，經查表得前標為 13 級分
 第 50 百分位數的人數約在 $134277 \times 50\% = 67138.5$ 處，經查表得均標為 10 級分
 第 25 百分位數的人數約在 $134277 \times 25\% = 33569.25$ 處，經查表得後標為 6 級分
 第 12 百分位數的人數約在 $134277 \times 12\% = 16113.24$ 處，經查表得底標為 4 級分

4. 某國家連續四年的經濟成長率分別為 2.5 %，3 %，4 %，2.6 %，試求這四年的年平均成長率為何？（四捨五入取到百分數的小數點後第一位）

解 四年的年平均成長率為 $r = \sqrt[4]{(1+2.5\%)(1+3\%)(1+4\%)(1+2.6\%)} - 1$

$$= \sqrt[4]{1.025 \times 1.03 \times 1.04 \times 1.026} - 1 \approx 0.030232977 \approx 3.0\%$$

按法：按 $\left[\frac{1}{x}\right]$ 後輸入 $1.025 \times 1.03 \times 1.04 \times 1.026$ ，
接著再依序按 $\left[\frac{1}{x}\right]$ ， SHIFT ， x^y ， 4 ， $-$ ， 1 ， $=$

5. 已知 7 個數據 476，485，479，482，494，488，491 的算術平均數為 485，試求標準化後的數據

解 已知算術平均數 $\mu = 485$ ，而標準差為

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7}((476-485)^2 + (485-485)^2 + (479-485)^2 + (482-485)^2 + (494-485)^2 + (488-485)^2 + (491-485)^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{252}{7}} = 6,$$

故經標準化 $X_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ，所得的數據為 $-\frac{3}{2}$ ，0，-1， $-\frac{1}{2}$ ， $\frac{3}{2}$ ， $\frac{1}{2}$ ，1

二、進階題

6. 某班共有 40 人，某次月考全班數學的平均成績是 68 分。但成績結算後，才發現有兩位學生成績登錄有誤，有一位是 75 分卻登錄為 95 分；另一位是 84 分卻登錄為 48 分。試問這兩位學生成績經過更正後，全班平均成績是多少？

解 全班平均成績為 $\frac{40 \times 68 - 95 + 75 - 48 + 84}{40} = 68.4$ (分)

7. 某高中數學科計算學期成績的公式如下：平時成績占 30 %，兩次期中考各占 20 %，期末考占 30 %。已知小芬平時成績為 80 分，期中考成績分別為 50，55 分。試問小芬期末考成績至少需要考多少分，才能使她的學期成績達到 60 分以上？

解 假設期末考考 x 分，依題意可得

$$80 \times 0.3 + 50 \times 0.2 + 55 \times 0.2 + x \times 0.3 \geq 60, \text{ 得 } x \geq 50,$$

故小芬期末考至少需要考 50 分

8. 已知 5 個數 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ 且 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 580$ ，則這 5 個數的標準差為何？

解 5 個數的標準差為 $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}\right)^2} = 4$

9. 某公司 9 名員工薪水如下：

27530, 30890, 28010, 28490, 29930, 28490, 28970, 29450, 28970

(元)，將以上數據減去 27050 後再除以 480，得新數據如下：

1, 8, 2, 3, 6, 3, 4, 5, 4。

- (1) 新數據的算術平均數及標準差為何？
 (2) 公司員工薪水的算術平均數及標準差為何？

解 (1) 將原數據 x_i 減去 27050 再除以 480，

得新數據 y_i (即 $\frac{x_i - 27050}{480}$) 為 1, 8, 2, 3, 6, 3, 4, 5, 4，計算可得，

新數據之算術平均數為

$$\mu_y = \frac{1+8+2+3+6+3+4+5+4}{9} = 4,$$

新數據之標準差為

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (8-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2}{9}} = 2$$

(2) 由 $y_i = \frac{x_i - 27050}{480}$ 及 $\mu_y = 4$, $\sigma_y = 2$ 可得，

$$\mu_y = \frac{\mu_x - 27050}{480} = 4, \text{ 解得 } \mu_x = 480 \times 4 + 27050 = 28970$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{480} = 2, \text{ 解得 } \sigma_x = 480 \times 2 = 960$$

故公司員工薪水的算術平均數為 28970 元，標準差為 960 元

三、挑戰題

10. 某一次數學競賽，只有 10 位同學參加，其成績的平均分數為 56 分，標準差為 4 分。若已知此 10 人中之 8 個人的成績分別為 50, 52, 53, 54, 56, 57, 60, 61 分，則其他兩人的成績為何？

解 假設這兩人的成績為 a, b (且 $a \geq b$)，將所有人的成績減去 56，

得新數據 y_i (即 $x_i - 56$) 為 $a - 56 = a'$, $b - 56 = b'$, $-6, -4, -3, -2, 0, 1, 4, 5$

$$\text{則有 } \begin{cases} a' + b' + (-6) + (-4) + (-3) + (-2) + 0 + 1 + 4 + 5 = 0, \\ \sqrt{\frac{(a')^2 + (b')^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2}{10}} = 4, \end{cases}$$

$$\text{化簡得 } \begin{cases} a' + b' = 5, \\ (a')^2 + (b')^2 = 53, \end{cases}$$

解得 $a' = 7$, $b' = -2$,

故 $a = 63$, $b = 54$ ，即其他兩人的成績為 63 分與 54 分