

習題 4-1 解答

一、基本題

1. 設字集為所有實數，考慮以下集合 A, B ,

$A = \{x|x \text{ 是實數, 且 } -5 \leq x < 4\}$, $B = \{x|x \text{ 是實數, 且 } 2 < x < 9\}$ 。試求下列各集合：

- (1) $A \cap B$ 。 (2) $A \cup B$ 。 (3) $A - B$ 。
 (4) A' 。 (5) $A' \cap B'$ 。 (6) $A \cup B'$ 。

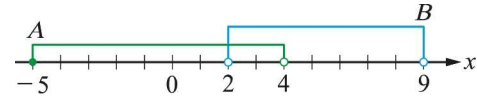
(提示：畫數線)

解 已知字集為所有實數的集合 R ,

$A = \{x|x \text{ 是實數, 且 } -5 \leq x < 4\}$,

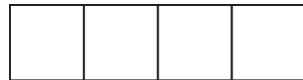
$B = \{x|x \text{ 是實數, 且 } 2 < x < 9\}$,

以數線呈現如右：



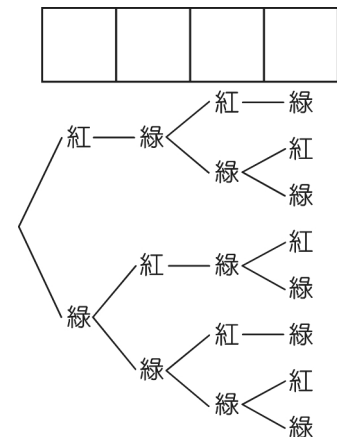
- (1) $A \cap B = \{x|x \text{ 是實數, 且 } 2 < x < 4\}$ 。
 (2) $A \cup B = \{x|x \text{ 是實數, 且 } -5 \leq x < 9\}$ 。
 (3) $A - B = \{x|x \text{ 是實數, 且 } -5 \leq x \leq 2\}$ 。
 (4) $A' = R - A = \{x|x \text{ 是實數, 且 } x < -5 \text{ 或 } x \geq 4\}$ 。
 (5) $A' \cap B' = (A \cup B)' = \{x|x \text{ 是實數, 且 } x < -5 \text{ 或 } x \geq 9\}$ 。
 (6) $A \cup B' = \{x|x \text{ 是實數, 且 } x < 4 \text{ 或 } x \geq 9\}$ 。

2. 用紅、綠兩色將下方格子塗色，若紅色格子的右邊不能緊接著紅色，且每一個格子都要上色，試問有多少種方法？



解 以樹狀圖來呈現所有可能的塗法，如右圖。

所以有紅綠紅綠，紅綠綠紅，紅綠綠綠，綠紅綠紅，綠紅綠綠，綠綠紅綠，綠綠綠紅，綠綠綠綠，共 8 種。



3. 某健身中心的會員編號為五碼數字，其中男性會員的第一碼為 1，女性會員的第一碼為 2，且任一碼不得為 4。試問共有多少個可行的會員編號？

解 由乘法原理知，

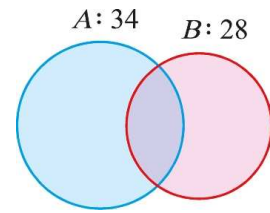
所求共有 $2 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 13122$ 個。

4. 某校有一個傳統，在冬至時學生們都會送湯圓給心儀的同學。今年宿舍外面有 50 位學生帶了湯圓過來等人，其中 34 位帶了甜湯圓、28 位帶了鹹湯圓。試問只帶鹹湯圓但沒帶甜湯圓的學生有多少位？



解 設 A 表帶甜湯圓的人所成的集合，
 B 表帶鹹湯圓的人所成的集合。

則由已知條件得 $n(A) = 34$, $n(B) = 28$, $n(A \cup B) = 50$,
 由取捨原理 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, 得
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 34 + 28 - 50 = 12$,
 因此 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 28 - 12 = 16$ 。
 故只帶鹹湯圓，但沒帶甜湯圓的學生有 16 位。

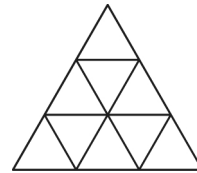


5. 試問右圖中有多少個大小不拘的正三角形？

解 按正三角形的邊長大小分類：

- (1) 邊長 1 的有 $1+3+5=9$ 個。
- (2) 邊長 2 的有 $1+2=3$ 個。
- (3) 邊長 3 的有 1 個。

由加法原理知，所求共有 $9+3+1=13$ 個。

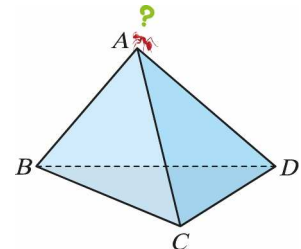
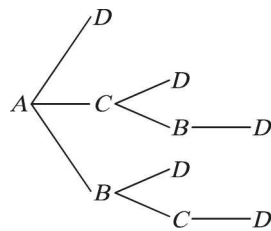


二、進階題

6. 右圖為一個四面體，一隻螞蟻從 A 點出發，沿著稜線爬行欲到達 D 點，且各頂點最多只能經過一次，試問有多少種走法？

解 以樹狀圖列出所有可能的走法，

共有 5 種走法。



7. 如下圖集合 A, B, C, D 的四個區域，試分別畫一個滿足條件的四邊形。

解 A 為不是菱形也不是矩形的四邊形，如右圖



B 為不是矩形的菱形，如右圖



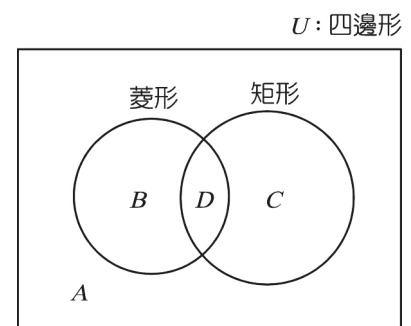
C 為不是菱形的矩形，如右圖



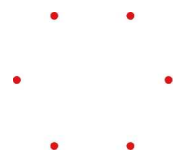
D 為菱形且為矩形，即正方形，如右圖



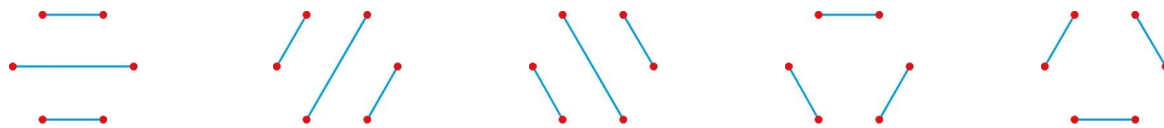
(非唯一解)



8. 如右圖的 6 個點，若兩兩用線段相連，每個點都恰連接一次，但任兩個線段不能相交，試問有多少種方法？



解



故共有 5 種方法。

9. 小珊從 1 到 10 之中選一個自然數，小芬也從 1 到 10 之中選一個自然數。若兩人選的數相乘後是 3 的倍數，試問有多少種方法？

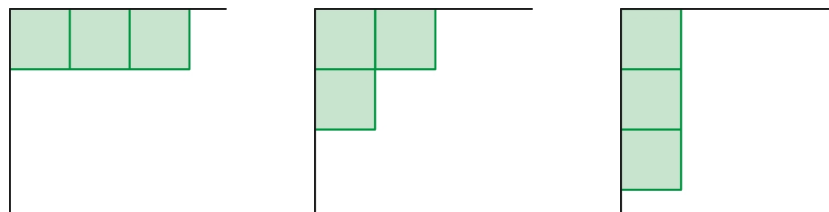
解 若兩人選的數至少有 1 個是 3 的倍數，則兩數相乘必是 3 的倍數，因此，可分類如下：

	<u>小珊</u>		<u>小芬</u>	
	3 的倍數	×	非 3 的倍數	: $3 \times 7 = 21$ 種。
	非 3 的倍數	×	3 的倍數	: $7 \times 3 = 21$ 種。
	3 的倍數	×	3 的倍數	: $3 \times 3 = 9$ 種。

故共有 $21 + 21 + 9 = 51$ 種方法。

三、挑戰題

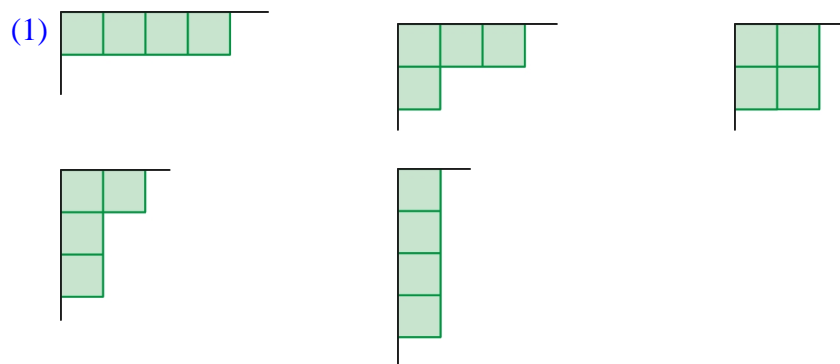
10. 如下圖，將 3 個大小相同的正方形排在平面上，將每一列的正方形靠左對齊，且規定下面的列長不可超出上面的列長，則共有 3 種方法。



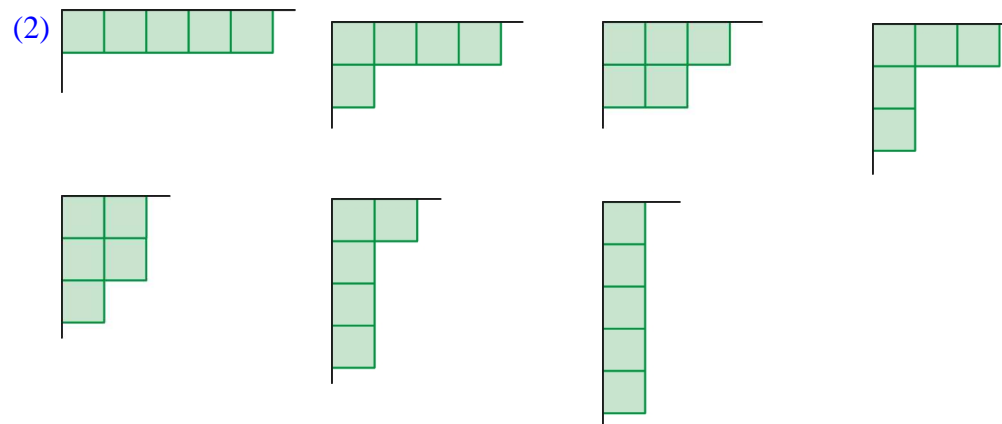
- (1) 畫出排 4 個正方形的所有方法。
 (2) 排 5 個正方形的的方法有多少種？

解 [解法一]

我們以圖示呈現如下：



共有 5 種方法



共有 7 種方法。

〔解法二〕

解法一的圖示，可一一對應出下列自然數的和。

(1) $4=4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$,

即將 4 寫成若干個自然數的和，且後項不能大於前項，因此共有 5 種方法。

(2) $5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$,

共有 7 種方法。