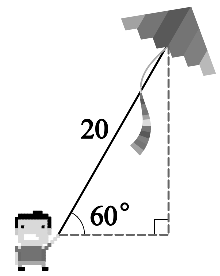
# 1 三角函數的應用

## 1-2 三角測量

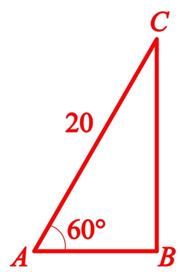
### 基礎題

1. 有一個小朋友放風箏，放出了 20 公尺長的線，已知風箏仰角為 60°，試求風箏高度。




解 [答：$10\sqrt{3}$ 公尺]

如圖，



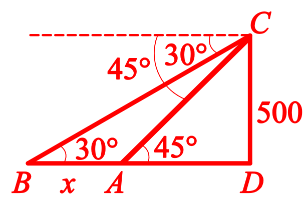

$\because\ \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\sin 60^\circ$

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{AC}\times\sin 60^\circ=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

故風箏高度為 $10\sqrt{3}$ 公尺

2. 小倩在高 500 公尺的山頂上俯看東方地面 $A$、$B$ 兩處的俯角分別為 45°及 30°，試求 $A$、$B$ 兩地之距離。

解 [答：$500\left(\sqrt{3}-1\right)$ 公尺]




如圖，設 $\overline{AB}=x$

直角△$ACD$ 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\tan 45^\circ \quad\Rightarrow\quad \dfrac{500}{\overline{AD}}=1 \ \Rightarrow\ \overline{AD}=500$

直角△$BCD$ 中

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\tan 30^\circ \quad\Rightarrow\quad \dfrac{500}{x+500}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad x=500\sqrt{3}-500=500\left(\sqrt{3}-1\right)$

故 $A$、$B$ 兩地的距離為 $500\left(\sqrt{3}-1\right)$ 公尺

3. 已知 $A$、$B$ 兩地相距 10 公里，從 $A$、$B$ 兩處發出 2 束仰角均為 60°的探照燈光投射在位於 $\overline{AB}$ 正上方的一架飛機上，試求此時飛機的高度。

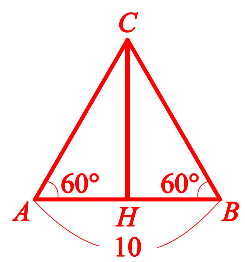
解 [答：$5\sqrt{3}$ 公里]

如圖，則 $\angle C=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

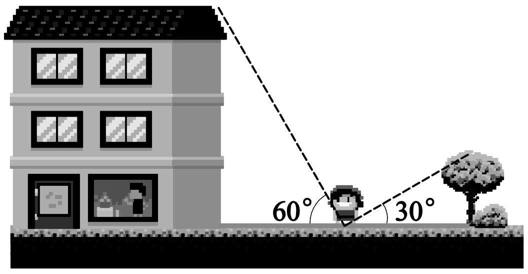
$\Rightarrow$ △$ABC$ 為正三角形 $\quad\Rightarrow\quad \overline{AC}=\overline{AB}=10$

所以 $\overline{CH}=\overline{AC}\times\sin 60^\circ=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

故此時飛機高度為 $5\sqrt{3}$ 公里



4. 小睿站在某建築物與一棵小樹的中點處，分別測得建築物與小樹的仰角為 60°與 30°，試問建築物高度是小樹高度的多少倍？




解 [答：3 倍]

如圖，設 $\overline{CD}=x$

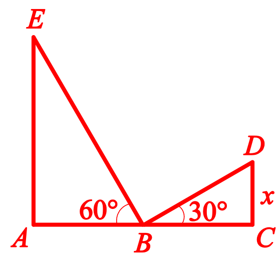
直角△$BCD$ 中

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{3}x$ 且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{3}x$

直角△$ABE$ 中

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AE}=\sqrt{3}\,\overline{AB}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}x=3x=3\overline{CD}$

故建築物高度是小樹高度的 3 倍



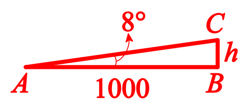

5. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近的建築物從塔臺地面到建築物頂樓的仰角不得超過 8°。某公司打算在離塔臺 1 公里處蓋大樓，為符合機場規定，該大樓高度不得超過多少公尺？（ $\tan 8^\circ \fallingdotseq 0.1405$ ）

解 [答：140.5 公尺]

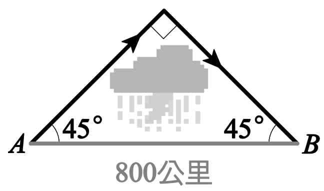
如圖，設大樓高度 $\overline{BC}=h$ 公尺　且 1 公里 = 1000 公尺

$\because \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\tan 8^\circ \quad \therefore h=\overline{AB}\times\tan 8^\circ \fallingdotseq 1000\times 0.1405=140.5$

故大樓高度不得超過 140.5 公尺




6. 一架飛機從 $A$ 地飛往 $B$ 地，飛行員為了避開某一雷雨區的雲層，因此從機場起飛後就拉高航線成仰角 45° 飛行，途中再調轉方向朝 $B$ 地繼續直飛，如圖所示，若 $\overline{AB}=800$ 公里，試問這趟航行共飛行多少公里？



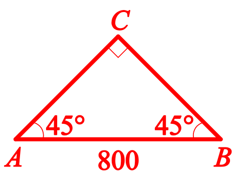

解 [答：$800\sqrt{2}$ 公里]

如圖 $\because \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}\times\sin 45^\circ=800\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=400\sqrt{2}=\overline{BC}$

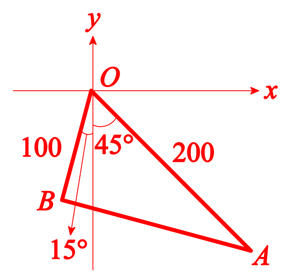
則 $\overline{AC}+\overline{BC}=400\sqrt{2}+400\sqrt{2}=800\sqrt{2}$

故此趟航行共飛行 $800\sqrt{2}$ 公里



7. 雷達站測出在過去 3 小時內，某航空母艦的位置由恆春東南方 200 公里處直線移動到恆春外海南 15°西的 100 公里處，試求航空母艦移動的距離。

解 [答：$100\sqrt{3}$ 公里]




如圖

$\angle AOB = 45° + 15° = 60°$

利用餘弦定理

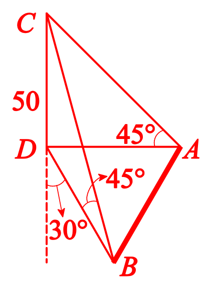
$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\times\overline{AO}\times\overline{BO}\times\cos(\angle AOB)$

$= 200^2 + 100^2 - 2\times200\times100\times\cos60° = 30000$

則 $\overline{AB} = 100\sqrt{3}$　　故航空母艦移動的距離為 $100\sqrt{3}$ 公里

8. 一棟大樓高 50 公尺，樹 $A$ 在大樓正東方，樹 $B$ 在大樓的南 30°東方向，小玲從樓頂測得兩樹之俯角皆為 45°，試求兩樹之距離。

解 [答：50 公尺]




如圖　則 $\angle ADB = 90° - 30° = 60°$

直角△$ACD$ 中　$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \tan45° = 1 \Rightarrow \overline{AD} = \overline{CD} = 50$

直角△$BCD$ 中　$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \tan45° = 1 \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} = 50$

〈法一〉

△$ABD$ 中，已知 $\angle ADB = 60°$，$\overline{AD} = 50$，$\overline{BD} = 50$

則 $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos60°$

$= 50^2 + 50^2 - 2\times50\times50\times\dfrac{1}{2} = 2500 \Rightarrow \overline{AB} = 50$

〈法二〉

△$ABD$ 中，已知 $\angle ADB = 60°$

$\overline{AD} = 50$，$\overline{BD} = 50$　則△$ABD$ 為正三角形　即 $\overline{AB} = 50$

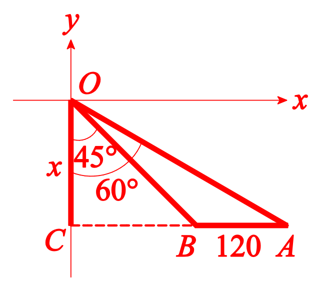
故兩樹之距離為 50 公尺

## 進階題

9. 根據氣象預報，中度颱風桃芝今早的中心位置位於臺灣南 60°東，暴風半徑約為 200 公里，由東朝西前進。已知當桃芝繼續西行 120 公里後位於臺灣南 45°東，倘若其路徑不變，則此颱風是否會侵襲本島？

解 [答：是]

如圖




設颱風與臺灣的最短距離為 $\overline{OC}=x$ 公里

直角△$BOC$ 中 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{OC}}=\tan 45°=1 \Rightarrow \overline{BC}=\overline{OC}=x$

直角△$AOC$ 中，$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}}=\tan 60°=\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{3}\overline{OC}=\sqrt{3}x$

$\because \overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC} \Rightarrow \sqrt{3}x=120+x \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)x=120$

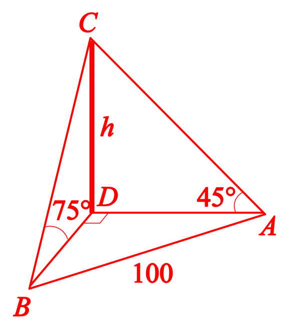
$\Rightarrow x=\dfrac{120}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{120\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=60\left(\sqrt{3}+1\right)\fallingdotseq 60\times\left(1.7+1\right)=162<200$

故颱風會侵襲本島

10. 一位賞鳥人士在神木的正東方一點 $A$ 測得樹上鳥巢的仰角為 45°，在神木的正南方一點 $B$ 測得仰角為 75°。已知 $A$、$B$ 兩點相隔 100 公尺，試求鳥巢離地多少公尺？

解 [答：$25\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ 公尺]

如圖　設鳥巢離地距離 $\overline{CD}=h$ 公尺




直角△$ACD$ 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\tan 45°=1 \Rightarrow \overline{AD}=\overline{CD}=h$

直角△$BCD$ 中 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\tan 75° \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{h}{\tan 75°}=h\times\cot 75°$

△$ABD$ 中，已知 $\angle ADB=90°$

$\therefore \overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

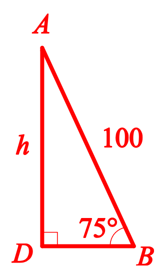
$\Rightarrow h^2+\left(h\cot 75°\right)^2=100^2 \Rightarrow h^2+h^2\cot^2 75°=100^2$

$\Rightarrow h^2(1+\cot^2 75°)=100^2 \Rightarrow h^2\times\csc^2 75°=100^2$

$\Rightarrow h=\dfrac{100}{\csc 75°}=100\times\sin 75°=100\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=25(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

故鳥巢離地 $25\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ 公尺

另解：




$\because$△$BDC\cong$△$BDA$

$\therefore h=100\sin 75°=100\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=25(\sqrt{6}+\sqrt{2})$（公尺）

| 日期 | 成績 |
|---|---|
| | |