Ch 1.2 函數及其極限 習題　三年____班　座號：___　姓名：

A 基本能力題

1 是非題：正確請畫〇，錯誤請打 X

(1)函數 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定義域為任意實數 $\mathbb{R}$

(2)函數 $y=\sin x$ 是一對一函數

(3) $f(x)=\log x$ 的反函數是 $f^{-1}(x)=10^x$

(4)若 $f(x)=x^3$，$g(x)=2x+1$，則$(f\circ g)(x)=(2x+1)^3$

(5)若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$，則 $f(0)=1$

(6)若 $f(0)=1$，則 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

(7)若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ 且 $f(0)=1$，則 $f(x)$在 $x=0$ 處連續

(8)已知函數 $f(x)$滿足 $f(1)=1$，$f(3)=3$，則在區間(1，3)中必存在一個實數 c，使得 $f(c)=2$

解：(1)X：由於 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$，因此 $x^2-1\ge 0$，$\Rightarrow$ $(x-1)(x+1)\ge 0$，$\Rightarrow$ $x\ge 1$ 或 $x\le -1$，

故定義域為$\{x\in\mathbb{R} \mid x>1$ 或 $x<-1\}$

(2)X：例如 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$

(3)〇，(4)〇

(5)X：例如 $f(x)=\begin{cases}1，x\neq 0\\ 2，x=0\end{cases}$

(6)X：例如 $f(x)=\begin{cases}2，x\neq 0\\ 1，x=0\end{cases}$

(7)〇

(8)X：例如$\begin{cases}3，x\ge 0\\ 1，x\le 0\end{cases}$

2 設 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\sqrt{x}$，求函數 $f\circ g$，$g\circ f$ 及其定義域

解：函數 f 的定義域為實數，函數 g 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 0\}$，$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=2\sqrt{x}-1$，

由於函數 g 的值都包含在實數 $\mathbb{R}$ 中，故合成函數 $f\circ g$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 0\}$。

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=\sqrt{2x-1}$，由於函數 f 的值必須包含在 $g(x)$ 的定義域內，

因此 $2x-1\ge 0$，即 $x\ge\frac{1}{2}$，故合成函數 $g\circ f$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge\frac{1}{2}\}$

3 試求下列各函數的反函數，並寫出它的定義域：(1) $f(x)=4x-5$　(2) $g(x)=\sqrt{x+4}$　(3) $h(x)=\frac{1}{2}(10^x-2)$

解：(1)設 $f(x)$的反函數為 $f^{-1}(x)$，滿足 $f(f^{-1}(x))=x$，$\Rightarrow 4f^{-1}(x)-5=x$，$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x+5)$，

由於 $f(x)=4x-5$ 的值域為實數，故 $f^{-1}(x)$ 的定義域為實數 $\mathbb{R}$

(2)設 $g(x)$的反函數為 g^{-1}，滿足 $g(g^{-1}(x))$，$\Rightarrow$ $\sqrt{g^{-1}(x)+4}=x$ $\Rightarrow g^{-1}(x)=x^2-4$

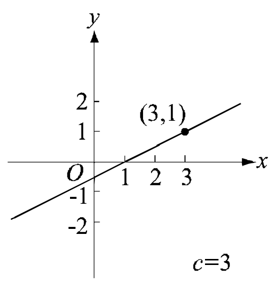
由於 $\sqrt{x+4}\ge 0$，所以 $g(x)$ 的值域為 $\{y\in\mathbb{R} \mid y\ge 0\}$，故 $g^{-1}(x)$ 的定義域為$\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 0\}$

(3)設 $h(x)$ 的反函數為 $h^{-1}(x)$，滿足 $h(h^{-1}(x))=x$，$\Rightarrow \frac{1}{2}(10^{h^{-1}(x)}-2)=x$

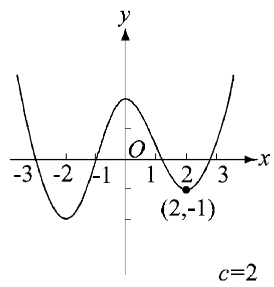
$\Rightarrow 10^{h^{-1}(x)}=2x+2 \Rightarrow h^{-1}(x)=\log(2x+2)$，由於 $\frac{1}{2}(10^{x}-2)>\frac{1}{2}(0-2)=-1$，

所以 $h(x)$ 的值域為 $\{y\,|\,y>-1\}$，故 $h^{-1}(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-1\}$

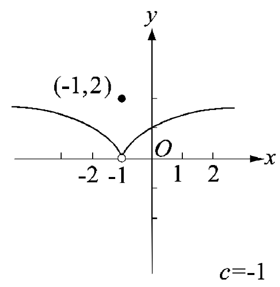
4 在圖(一)～(六)中，利用圖形求下列各極限值：(1) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$　(3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$



圖(一)



圖(二)



圖(三)

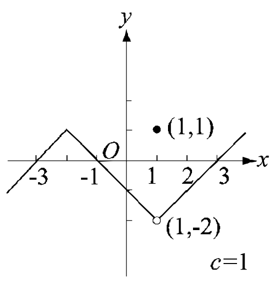
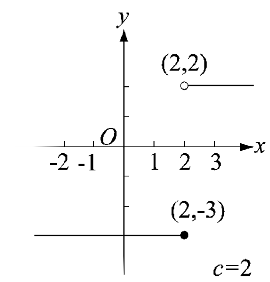
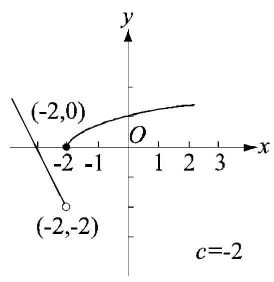


圖 (四)



圖(五)



圖(四)

解：(1) $\lim\limits_{x\to 3^+} x f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$，$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} x f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2$，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-3$，$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-2$

(3) $\lim\limits_{x\to 3} x f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ 不存在

5 試求下列各極限：(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x+5)$　(2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$　(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 3} x(x^2-2x+5)=8$，(2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=\dfrac{18}{24}=\dfrac{3}{4}$，(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4+0=4$

6 下列各極限是否存在? 如果存在，試求之：

(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-x}{x^2-4}$　(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}$　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x|x|-1}{x-1}$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-1}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$，(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$，(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x|x|-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

7 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\geq 2 \\ 2x+3, x<2 \end{cases}$ 試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(A) $f(2)=5$　(B) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$　(C) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$　(D) $\lim_{x\to 3} f(x)=10$　(E) $\lim_{x\to 0} f(x)=3$

解：(A) $f(2)=2^2+1=5$。(B) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+1)=5$。(C) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x+3)=7\neq f(2)$。

(D) $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2+1)=10$。(E) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(2x+3)=3$。

故選(A)(B)(D)(E)

8 (1)試證：$-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq |x|$　(2)利用(1)的結果，求 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

解：(1)已知當 $x\neq 0$ 時，$-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$ 恆成立，可推得 $|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$。可得 $|x\sin\frac{1}{x}|\leq |x|$，因此 $-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq |x|$

(2)因為 $\lim_{x\to 0}|x|=0$，$\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$，根據夾擠定理可知 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

9 若函數 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-16}{x+4}, & x\neq -4 \\ -8, & x=-4 \end{cases}$ 試回答下列問題：

(1)求 $\lim_{x\to -4} f(x)$的值　(2)判別函數 $f(x)$在 $x=-4$ 處連續嗎

解：(1) $\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8$

(2)因為 $\lim_{x\to -4} f(x)=-8$ 且 $f(-4)=-8$，所以 $f(x)$在 $x=-4$ 處連續

10 已知 $f(x)=(x-7)^2(x-9)^2+3x$，試證：至少有一實數 c，使得 $f(x)=26$

解：由於 $f(x)$ 為連續函數，且 $f(7)=21$，$f(9)=27$，$21<26<27$。根據介值定理，存在 $7<c<9$，使得 $f(c)=26$

B 進階題

1 試求下列各極限：(1) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$　(2) $\lim_{x\to 0} x^2[x]$

解：(1) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x+3}=-\frac{1}{6}$

(2) $\lim_{x\to 0^+} x^2[x]=\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot 0=0$，$\lim_{x\to 0^-} x^2[x]=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)=0$，故 $\lim_{x\to 0} x^2[x]=0$

2 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\dfrac{5}{3}$，試求數對$(a，b)$

[提示：因為 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$，假設 $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+ax+b)$ 不等於 0，則 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}$ 不存在，因此 $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+ax+b)=0$]

解：依提示，$\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+ax+b)=0 \Rightarrow 2a+b=-8$，可得 $b=-8-2a$，代入 $\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}$，

整理得 $\dfrac{2x^2ax-2a-8}{x^2-x-2}=\dfrac{2(x^2-4)+a(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{2x+a+4}{x+1}\ (x\neq 2)$，因此 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+a+4}{x+1}=\dfrac{a+8}{3}=\dfrac{5}{3}$。

$a+8=5$，得 $a=-3$ 代入 $2a+b=-8$，得 $b=-2$，故 $(a,b)=(-3,-2)$

3 設 k 為一定數，欲使函數 $f(x)=\begin{cases}3x-k, & x<2\\ x2+kx+4, & x>2\end{cases}$ 為一連續函數，試問 k 的值為何？

解：已知 $f(x)$ 在 $x>2$ 與 $x<2$ 處均連續，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 處連續，則 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$。

由於 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+kx+4)=8+2k$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-k)=6-k$，$8+2k=6-k$，故 $k=-\dfrac{2}{3}$

單元 2 函數與函數的極限 習題 三年____班 座號：___ 姓名：

觀念

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」

□(1)若 $f(x)=x^2+3x+4$，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$

□(2)極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 不存在

□(3)若多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=3$，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

解：(1) ○：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1^2+3\times 1+4=8$。

(2) ×：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$。

(3) ○：因為多項式函數 $f(x)$ 為連續函數，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$

一、基礎題

1.求下列各函數的定義域與值域：

(1) $f(x)=\sin x$ (2) $f(x)=x^2+2x+4$ (3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

解：(1)因為對所有實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。

又因為 $-1\le \sin x\le 1$，所以值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$。

(2)因為對所有實數 x，x^2+2x+4 都有意義，所以定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。

又因為 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\ge 3$，所以值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid y\ge 3\}$。

(3)不等式 $9-x^2\ge 0$ 可化為 $(x+3)(x-3)\le 0$，解得 $-3\le x\le 3$。

因此，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 3\}$。

又因為當 $-3\le x\le 3$ 時，$0\le 9-x^2\le 9$，所以 $0\le\sqrt{9-x^2}\le 3$，即值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid 0\le y\le 3\}$

2.已知函數 $f(x)=x+2$ 與 $g(x)=3-x$，求下列各函數及其定義域：

(1) $(f-g)(x)$ (2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

解：2. 函數 $f(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$，$g(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 3\}$，它們的交集為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 3\}$。根據函數四則運算的定義，得

(1) $(f-g)(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 3\}$，且 $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-\sqrt{3-x}$

(2)因為 $x=3$ 使 $g(x)=0$，所以 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\}$，且 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$

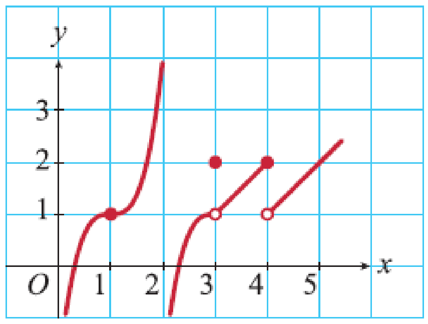
3.已知函數 $f(x)=2x+3$ 與 $g(x)=x^2+1$，求下列各合成函數：

(1) $(g\circ f)(x)$ (2) $(f\circ g)(x)$

解：3. (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)=(2x+3)^2+1=4x^2+12x+10$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=2(x^2+1)+3=2x^2+5$。

4.已知函數 $y=f(x)$的圖形如圖，選出所有正確的選項：



(1) $\lim_{x\to1} f(x)=1$　(2) $\lim_{x\to2} f(x)=0$　(3) $\lim_{x\to3} f(x)=2$　(4) $\lim_{x\to4} f(x)=2$

解：4. (1) 當 x 趨近 1 時，$f(x)$ 會趨近 1，因此 $\lim_{x\to1} f(x)=1$。

(2) 當 x 從左邊趨近 2 時，$f(x)$ 會趨近 ∞，即 $\lim_{x\to2^-} f(x)$ 不存在。
因此 $\lim_{x\to2} f(x)$ 不存在。

(3) 因為 $\lim_{x\to3^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to3^+} f(x)=1$，所以 $\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^+} f(x)=1$
因此 $\lim_{x\to3} f(x)=1$。

(4) 因為 $\lim_{x\to4^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to4^+} f(x)=1$，所以 $\lim_{x\to4^-} f(x)\neq\lim_{x\to4^+} f(x)$。
因此 $\lim_{x\to4} f(x)$ 不存在。
故選 (1)。

5.求下列各極限：

(1) $\lim_{x\to1}(x^2+x-3)$　(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$　(3) $\lim_{x\to3}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x+1}{x^2-1}\right)$

解：5. (1) $\lim_{x\to1}\left(x^2+x-3\right)=1^2+1-3=-1$。

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}=\dfrac{0^2-4}{0^2+2\times0+4}=-1$

(3) 因為 $\lim_{x\to3}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{5}{4}$ 且 $\lim_{x\to3}\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$，所以

$\lim_{x\to3}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x+1}{x^2-1}\right)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}=0$。

6.求下列各極限：

(1) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$　(2) $\lim_{x\to2}\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$　(3) $\lim_{x\to3}\left(\dfrac{x-4}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)$　(4) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5x-2}{x^3-1}\right)$

解：6. (1) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}$。

(2) 因為分母在 $x=2$ 的函數值為 0，而分子在 $x=2$ 的函數值不為 0，所以 $\lim_{x\to2}\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ 不存在

(3) 當 $x\neq3$ 時，因為 $\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

所以 $\lim_{x\to3}\left(\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

(4) 當 $x\neq1$ 時，因為 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5x-2}{x^3-1}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

所以 $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5x-2}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2+x+1}=-\dfrac{2}{3}$

7.設 a 為實數，且極限 $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+x+a}{x+2}$ 存在，則：

(1)求 a 的值　(2)求此極限

解：7. (1) 因為極限存在，且分母在 $x=-2$ 的函數值為 0，所以分子在 $x=-2$ 的函數值必須為 0。
因此 $(-2)^2+(-2)+a=0$，解得 $a=-2$

(2) 極限 $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-1)=-3$

8.已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+5，當 x\ge 1 \\ ax-2，當 x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 處連續，求實數 a 的值

解：8. 因為 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$。又由於

$f(1)=1^2+5=6$，

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+5)=6$，

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax-2)=a-2$，

於是可得 $a-2=6$，解得 $a=8$。

9.已知 $f(x)=x^3+x$，求證：在 3 與 4 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=64$

解：因為 f (x)為多項式函數，所以 f (x)是連續函數。又因為 f (3) = 30，f (4) = 68

所以 64 介於 f (3)與 f (4)之間。由介值定理得知：在 3 與 4 之間至少有一實數 c，使得 f (c) = 64

二、進階題

10.已知多項式 $f(x)$滿足 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，選出所有正確的選項：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+\dfrac{x-1}{x})=5$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2}=5$　(3) $f(1)=5$　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$　(5) $\lim\limits_{x\to 1}(x f(x))=5$

解：

10.(1)因為 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{0}{1}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)=5+0=5$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}\times 5=\dfrac{5}{2}$。

(3)因為多項式函數 $f(x)$ 為連續函數，所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$。

(4)因為分子在 $x=1$ 的函數值 $f(1)=5\neq 0$，而分母在 $x=1$ 的函數值為 0，所以極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 不存在

(5)因為 $\lim\limits_{x\to 1} x=1$，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x\cdot f(x))=1\times 5=5$。

故選 (1)(3)(5)。

11.已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax+b}=4$，求實數 a，b 的值

解：因為極限存在，且分子在 x = 2 的函數值為 0，所以分母在 x = 2 的函數值必須為 0，由因式定理得知，分母有 x - 2 的因式。令分母 $x^2+ax+b=(x-2)(x-k)$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-k)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-k}=\dfrac{4}{2-k}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{2-k}=4$，得 $k=1$，$(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$，$\therefore a=-3$，$b=2$

Ch 1.3 函數的概念 習題　　三年____班 座號：___ 姓名：

1.求下列各函數的定義域：(LBR)

(1) $f(x)=|x+1|$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$　(3) $f(x)=\sqrt{2x-3}$　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$

2.設函數 $f(x)=x^2-4x+5$ 的定義域為 $\{x\in R|1\le x\le 5\}$，求 $f(x)$ 的值域。

3.設函數 $f(x)=2x+3$ 的值域為 $\{y\in R|-5\le y\le 9\}$，求 $f(x)$ 的定義域

4.設函數 $f(x)=[x[x]]$，其中[ ]為高斯符號。已知 $f(x)$ 的定義域為 $\{x\in R|0\le x\le 2\}$，求 $f(x)$ 的值域

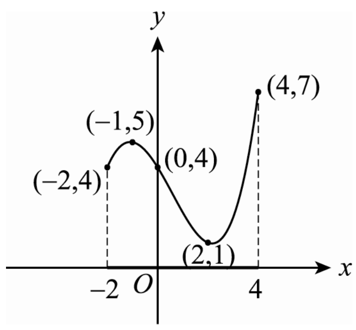
5.已知函數 $f(x)=x^2+x$ 與 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求下列各函數及其定義域：

(1) $(f+g)(x)$　(2) $(f-g)(x)$　(3) $(f\cdot g)(x)$　(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

6.已知函數 $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$ 與 $g(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$，求下列各合成函數：

(1) $(g\circ f)(x)$　(2) $(f\circ g)(x)$

7.設函數 $f(x)$ 的定義域為 $\{x\in R|-2\le x\le 4\}$，且其圖形如右，選出正確的選項：



(1) $f(0)=4$　(2) $f(x)$ 的函數值恆正　(3) $f(x)$ 的值域為 $\{y\in R|4\le y\le 7\}$

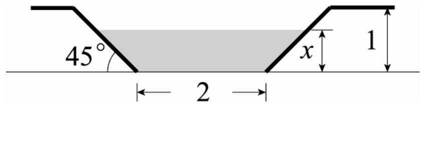
(4)方程式 $f(x)=0$ 沒有實根　(5)方程式 $f(x)=4$ 有四個相異實根

8.求函數 $f(x)=\sqrt{15-2x-x^2}$ 的定義域與值域

9.已知函數 $f(x)=2x+3$ 與一次函數 $g(x)$ 的合成為 $(g\circ f)(x)=x$，求 $g(x)$

10.某灌溉渠的橫截面是等腰梯形，如右圖。其底寬 2 公尺，渠深 1 公尺，邊坡的傾角是45°。

設水深為 x 公尺，水域橫截面的面積為 $f(x)$ 平方公尺，則：



(1)寫出函數 $f(x)$

(2)求函數 $f(x)$ 的定義域

(3)求函數 $f(x)$ 的值域

11.已知 $f(x)=\dfrac{2}{3}x+1$，$f_2(x)=f(f(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，求 $f_2(x)$ 與 $f_3(x)$