Ch 1.1 數列及其極限　習題(南一)　　三年___班 座號：____ 姓名：

A 基本能力題

1 是非題：正確請畫○，錯誤請打 X

(1)數列 $\left\langle \dfrac{10^8}{n} \right\rangle$ 是發散數列

(2)數列 $\langle \sin n\pi \rangle$ 是收斂數列

(3)已知數列 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 均為發散數列，則數列 $\langle a_n+b_n \rangle$ 也是發散數列

(4) $\sum_{k=1}^{n}(2a_k-b_k+3)=2\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k+3$

(5) $3-6+12-24+\cdots+3(-2)^{n-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}3(-2)^{k-1}$

(6) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+(\dfrac{-1}{3})^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{1-(\frac{-1}{3})}$

(7) $2-2+2-2+\cdots=\dfrac{2}{1-(-1)}=1$

解：(1)X：觀察數列 $\dfrac{10^8}{1}$，$\dfrac{10^8}{2}$，…，$\dfrac{10^8}{10^8}=1$，$\dfrac{10^8}{10^9}=0.1$，$\dfrac{10^8}{10^{10}}=0.01$，…，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^8}{n}=0$

(2)○：觀察數列 $\sin 0\pi=0$，$\sin\pi=0$，$\sin 2\pi=0$，$\sin 3\pi=0$，…，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$

(3)X：例如 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n-1}$，則 $a_n+b_n=0$

(4)X：$\sum_{k=1}^{n}(2a_k-b_k+3)=2(\sum_{k=1}^{n}a_k)-(\sum_{k=1}^{n}b_k)+\sum_{k=1}^{n}3=2(\sum_{k=1}^{n}a_k)-(\sum_{k=1}^{n}b_k)+3n$

(5)○

(6)○

(7)X：因為公比 $r=-1$，不能適用無窮等比級數的求和公式

2 判斷下列各數列是否有極限？數列極限存在時，求其極限：

(1) $\left\langle (\dfrac{-4}{7})^n \right\rangle$　(2) $\langle \pi^n \rangle$　(3) $\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n^3} \right\rangle$　(4) $\langle (-2)^n \rangle$

解：(1)公比 $r=-\dfrac{4}{7}$，由於 $-1<\dfrac{-4}{7}<1$，有極限，極限值為 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-4}{7})^n=0$

(2)公比 $r=\pi$，由於 $\pi>1$，沒有極限

(3)觀察數列 $\dfrac{(-1)}{1^3}$，$\dfrac{(-1)^2}{2^3}$，$\dfrac{(-1)^3}{3^3}$，$\dfrac{(-1)^4}{4^3}$，… 趨近於 0，故收斂，極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}=0$

(4)公比 $r=-2$，由於 $-2<-1$，沒有極限

3 判斷下列各數列是否有極限? 數列極限存在時，求其極限：

(1) $\left\langle \dfrac{2^n-7^n}{9^n} \right\rangle$　(2) $\left\langle \dfrac{3n^2+5n+10}{2n^2-n+3} \right\rangle$　(3) $\left\langle \dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n} \right\rangle$　(4) $\left\langle (\dfrac{2}{3})^n+(-1)^n \right\rangle$

解：(1) $a_n=\dfrac{2^n-7^n}{9^n}=(\dfrac{2}{9})^n-(\dfrac{7}{9})^n$，由於 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{9})^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{7}{9})^n=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(\dfrac{2}{9})^n-(\dfrac{7}{9})^n]=0-0=0$

(2) $a_n=\dfrac{3n^2+5n+10}{2n^2-n+3}=\dfrac{3+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\dfrac{3+0+0}{2-0+0}=\dfrac{3}{2}$

(3) $a_n=\dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}=\dfrac{3\cdot(\frac{3}{4})^n+4}{(\frac{3}{4})^n+1}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot(\frac{3}{4})^n+4}{(\frac{3}{4})^n+1}=\dfrac{3\cdot0+4}{0+1}=4$

(4) $a_n=(\frac{2}{3})^n+(-1)^n$，由於 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n=0$，$\langle(-1)^n\rangle$ 為發散數列，故 $\langle a_n\rangle$ 為發散數列

4 已知對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $4n+1\le na_n\le 4n+7$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值

解：已知對於每一個正整數 n，滿足 $4n+1\le na_n\le 4n+7$，所以 $\dfrac{4n+1}{n}\le a_n\le\dfrac{4n+7}{n}$，

由於 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{1}{n}}{1}=\dfrac{4+0}{1}=4$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+7}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{7}{n}}{1}=\dfrac{4+0}{1}=4$，根據夾擠定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$

5 (1)用 Σ 表示 $1\times31+2\times28+3\times25+4\times22+\cdots+30\times(-56)$。(每一項都是二等差數列逐項相乘)
(2)求(1)中級數的和

解：(1)由於數列的每一項都是二等差數列逐項相乘，觀察可知，1，2，3，4，…，n；
31，28，25，22，…，$31+(-3)\times(n-1)=34-3n$，所以數列的一般項 $a_n=n\times(34-3n)$，
故 $1\times31+2\times28+3\times25+4\times22+\ldots+30\times(-56)=\sum\limits_{k=1}^{30}k(34-3k)$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{30}k(34-3k)=\sum\limits_{k=1}^{30}34k-3k^2=34\sum\limits_{k=1}^{30}k-3\sum\limits_{k=1}^{30}k^2=34\times\dfrac{30\times31}{2}-3\times\dfrac{30\times31\times61}{6}=15810-28365=-12555$

6 求出下列各無窮等比級數的和：(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^k$ (2) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\cdots+(-1)^{n-1}(\frac{2}{3})^n+\cdots$

解：(1)由於 $-1<$ 公比 $\frac{4}{5}<1$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^k=(\frac{4}{5})+(\frac{4}{5})^2+(\frac{4}{5})^3+\cdots=\dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$

(2)由於 $-1<$ 公比 $\frac{-2}{3}<1$，$\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n+\cdots=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})}=\dfrac{2}{5}$

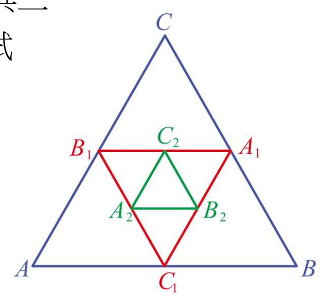
7 將下列各循環小數化成最簡分數：(1) $0.\overline{9}$ (2) $2.\overline{37}$ (3) $0.2\overline{81}$

解：(1) $0.\overline{9}=0.999\ldots=0.9+0.09+0.009+\ldots=\dfrac{0.9}{1-0.1}=1$

(2) $2.\overline{37}=2+0.37+0.0037+\ldots=2+\dfrac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}}=2+\dfrac{37}{99}=\dfrac{235}{99}$

(3) $0.2\overline{81}=0.2+0.081+0.00081+\ldots=0.2+\dfrac{\frac{81}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{81}{990}=\dfrac{279}{990}=\dfrac{31}{110}$

8 如右圖，設一正三角形 ABC 的邊長為 2，連接各邊中點 A_1，B_1，C_1 形成△$A_1B_1C_1$，再連接其三邊中點形成△$A_2B_2C_2$，依此規則下去，⋯。設△ABC 的面積為 S_0; △$A_i\,B_i\,C_i$ 的面積為 S_i，試答下列問題：



(1) $\dfrac{S_1}{S_0}=\dfrac{S_2}{S_1}=\cdots=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=r$，求 r 值　　(2)求無窮級數 $S_0+S_1+S_2+\cdots$ 的和

解：(1)已知△ABC 的邊長為 2；△$A_i\,B_i\,C_i$ 的邊長為ℓ_i

依規則可知，邊長比$\dfrac{\ell_1}{2}=\dfrac{\ell_2}{\ell_1}=\dfrac{\ell_3}{\ell_2}=\ldots=\dfrac{1}{2}$，由於相似形的面積比等於邊長的平方比，

所以$\dfrac{S_1}{S_0}=\dfrac{S_2}{S_1}=\ldots=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=\ldots=\dfrac{1}{4}$

(2)$S_0+S_1+S_2+\ldots=\dfrac{S_0}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}S_0=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

9 已知數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，其中 $a_n=3^n+4^n$，$b_n=5^n$

(1)利用計算機，在下表空格處填入正確答案：

n	1	2	3	4	5	6	7
$a_n=3^n+4^n$	7						
$b_n=5^n$	5						

(2)觀察上表，臆測 a_n 與 b_n 的大小關係　　(3)用數學歸納法證明(2)的臆測是正確的

解：(1)

n	1	2	3	4	5	6	7
$a_n=3^n+4^n$	7	25	91	337	1267	4825	18571
$b_n=5^n$	5	25	125	625	3125	15625	78125

(2)觀察(1)的表格，

當 $n\geq 3$ 時，不等式 $3^3+4^3<5^3$，$3^4+4^4<5^4$，$3^5+4^5<5^5$，⋯ 都成立，

因此臆測：當 $n\geq 3$ 時，$a_n=3^n+4^n<b_n=5^n$

(3)我們用數學歸納法證明 “當 $n\geq 3$ 時，$3^n+4^n<5^n$”

①當 $n=3$ 時，$3^3+4^3<5^3$ 成立

②設 $n=k$ (k 為正整數，$k\geq 3$) 時，$3^k+4^k<5^k$ 成立

則 $n=k+1$ 時，$3^{k+1}+4^{k+1}=3\cdot 3^k+4\cdot 4^k<5\cdot 3^k+5\cdot 4^k=5\,(3^k+4^k)<5\cdot 5^k=5^{k+1}$

由數學歸納法原理可以證得 當 $n\geq 3$ 時，$3^n+4^n<5^n$

B 進階題

1 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$　　(提示：$\dfrac{1}{(n+n)^2}\leq\dfrac{1}{(n+k)^2}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}$，其中 $1\leq k\leq n$)

解：依提示可知，

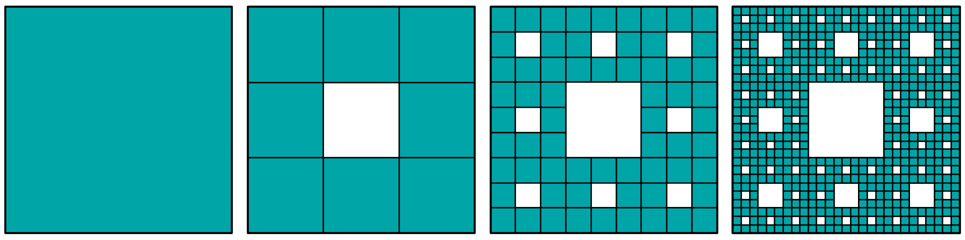
$$\frac{1}{(n+n)^2}+\frac{1}{(n+n)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\leq\frac{1}{(n+n)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

整理可得$\dfrac{1}{(n+n)^2}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}$，由於$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n)^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$，

根據夾擠定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]=0$

2 謝爾賓斯基地毯(Sierpinski carpet)是波蘭數學家謝爾賓斯基(Sierpinski，1882～1969) 1916 年提出的一種碎形結構：

如下圖，邊長為 1 單位長的正方形，第一次將其平分成 9 塊 (九宮格形)然後挖去中間一塊；第二次再將剩餘各塊各平分成 9 塊，分別去掉中間各一塊; …，以此類推。



設第 n 次挖去之正方形面積和為 a_n，

請計算以下各小題的值：

(1) a_2，a_3

(2) a_n (以 n 表示)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

解：(1)第一次挖去正方形的$\frac{1}{9}$，$\Rightarrow a_1=\frac{1}{9}$，第二次挖去剩下的$\frac{1}{9}$，$\Rightarrow a_2=\frac{1}{9}\times(1-a_1)=\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{81}$，

三次挖去剩下的$\frac{1}{9}$，$\Rightarrow a_3=\frac{1}{9}\times(1-a_1-a_2)=\frac{1}{9}\times(\frac{8}{9})^2=\frac{64}{729}$

(2)由(1)知，第 n 次挖去剩下的$\frac{1}{9}$，$\Rightarrow$ $a_n=\frac{1}{9}\times(\frac{8}{9})^{n-1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{\ }{9}}=1$