Ch 2-2 三角函數的定義與性質　習題　　一年____班　座號：____　姓名：

觀念題：試判斷下列各題之對錯，正確的畫「○」，錯誤的畫「×」

___(1) $(\sin 10^0)^2 = \sin 100^0$

___(2)由 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 可得 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$

___(3)由餘角關係 $\sin 10^0 = \cos 80^0$，則 $\sin^2 10^0 + \cos^2 80^0 = 1$

___(4)由 $\sin^2 40^0 + \cos^2 40^0 = 1$ 可得 $\cos^2 40^0 = 1 - \sin^2 40^0$，故 $\cos 40^0 = \pm\sqrt{1-\sin^2 40^0}$

___(5)直角△ABC 中，若已知 $\sin A = \frac{5}{12}$，仍無法得出三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 的長度

解：(1) ×，(2) ×，(3) ×，(4) ×，(5) ○

(1) $(10^\circ)^2$ 展開為 100 平方度，但沒有這種單位名稱

(2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

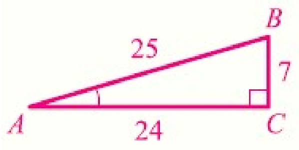
(3) $\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$

(4) $\cos 40^\circ = \sqrt{1-\sin^2 40^\circ}$（負不合）

基礎題：

1.△ABC 中，已知 $\angle C = 90^\circ$， $\overline{AC} = 24$ ， $\overline{BC} = 7$ ，試求 $\sin A + \cos A$ 之值

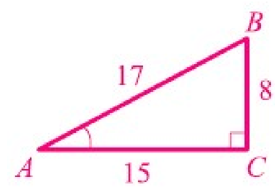
解：由畢氏定理知 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ 如圖所示



利用三角函數的定義 得 $\sin A = \frac{7}{25}$ $\cos A = \frac{24}{25}$ 故 $\sin A + \cos A = \frac{7}{25} + \frac{24}{25} = \frac{31}{25}$

2.△ABC 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{8}{17}$ ，試求 $\cot A + \csc A$ 之值

解：作直角 △ABC 使斜邊 $\overline{AB} = 17$ $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC} = 8$ 如圖所示，則

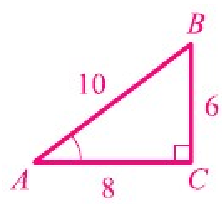


$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ 得 $\cot A = \frac{15}{8}$ ， $\csc A = \frac{17}{8}$

故 $\cot A + \csc A = \frac{15}{8} + \frac{17}{8} = 4$

3.△ABC 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 10$ 且 $\tan A = \frac{3}{4}$ ，試求△ABC 之面積

解：作直角 △ABC ，使斜邊 $\overline{AB} = 10$ ∵ $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}$

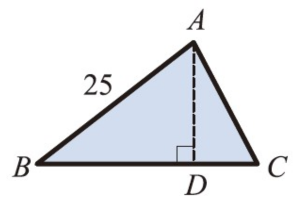


∴ 設 $\overline{BC} = 3k$ $\overline{AC} = 4k$（ $k > 0$ ）

又 $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \overline{AB}$ ⇒ $\sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k = 10$ ⇒ $k = 2$

得 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 8$ 故 △ABC 之面積 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$

4.如右圖△ABC 中，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的高，已知 $\overline{AB}=25$，$\sin B=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{15}{17}$，試求 $\overline{BC}$



解：△ABD 中

$\overline{AD}=25\sin B=25\times\frac{3}{5}=15$

$\overline{BD}=25\cos B=25\times\frac{4}{5}=20$

△ACD 中

$\overline{CD}=\overline{AD}\cot C=15\times\frac{8}{15}=8$

故 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=20+8=28$

5.試求下列三角函數值：

(1) $\sin\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}$　(2) $1-\sin 60°+\cos 30°$

解：(1) 原式 $=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$　(2) 原式 $=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

6.試求下列三角函數值：

(1) $\cos 20°\times\csc 70°$　(2) $\sin^2 32°\times(\sec^2 48°-\tan^2 48°)+\sin^2 58°$

解：(1) 原式 $=\cos 20°\times\sec 20°=1$

(2) 原式 $=\sin^2 32°\times 1+\sin^2 58°$

$=\sin^2 32°+\cos^2 32°=1$

7.已知 θ 為銳角且 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，試求 $\frac{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$ 之值

解：

$\because$ θ 為銳角且 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 得 $\theta=30°$

故原式 $=\frac{\sin 30°-\sqrt{3}\cos 30°}{\sin 30°+\sqrt{3}\cos 30°}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$

8.若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$，試求：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$

解：

(1) 原式兩邊平方，得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\Rightarrow\ 2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{16}$

故 $\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{9}{32}}=\frac{32}{9}$

進階題：

9.已知 θ 為銳角且 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，試求 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}$ 之值

解：

$$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18$$

10.已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，試求 $\sec\theta+\csc\theta$ 之值

解：已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow (\sin\theta-\cos\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$$

則 $\sec\theta+\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+4\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

得 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$（負不合）

故 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{1}{3}}=\sqrt{15}$