

Ch 2-4 三角函數的圖形與週期 習題

一年____班 座號：____ 姓名：

觀念題：試判斷下列各題之對錯，正確的畫「○」，錯誤的畫「×」

___(1)若 $\sec \theta = \frac{4}{5}$ ，則 θ 無解

___(2) $y = \sin 2x$ 的週期為 π ，且最大值為 2

___(3) $\sin \pi > \sin 3.14^\circ$

___(4)滿足 $\cos x = \frac{1}{2}$ 之解有無限多個

___(5)已知 θ 為銳角且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，則 $\theta < \frac{\pi}{4}$

解：(1)○，(2)×，(3)×，(4)○，(5)○

(2) $y = \sin 2x$ 之最大值為 1，(3) $\sin \pi = \sin 180^\circ = 0 < \sin 3.14^\circ$

基礎題：

觀察 6 個三角函數圖形： $y = \sin x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \tan x$ ， $y = \cot x$ ， $y = \sec x$ ， $y = \csc x$ ，並回答以下第 1~2 題

1.在第一象限內為遞增函數者有 a 個，遞減函數者有 b 個，試求 ab 之值

解：遞增函數者有 $y = \sin x$ ， $y = \tan x$ ， $y = \sec x$ ， $\Rightarrow a = 3$

遞減函數者有 $y = \cos x$ ， $y = \cot x$ ， $y = \csc x$ ， $\Rightarrow b = 3$ ， $ab = 3 \times 3 = 9$

2.函數圖形與 y 軸相交者有 a 個，過原點者有 b 個，試求 $\frac{a}{b}$ 之值

解：與 y 軸相交者有 $y = \sin x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \tan x$ ， $y = \sec x$ ， $\Rightarrow a = 4$

過原點者有 $y = \sin x$ ， $y = \tan x$ ， $\Rightarrow b = 2$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{2} = 2$$

3.試求函數 $y = 3\sin x + 4$ 之最大值與最小值

解：

$$\because -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3\sin x + 4 \leq 7$$

故 $y = 3\sin x + 4$ 之最大|值為 7，最小值為 1

4.試求下列各三角函數之週期：

(1) $y = \sin 3x$

(2) $y = 2\cos(-8x)$

(3) $y = 4\tan \pi x$

解：(1) $y = \sin x$ 之週期為 2π

所以 $y = \sin 3x$ 之週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(2) $y = \cos x$ 之週期為 2π

所以 $y = 2\cos(-8x)$ 之週期為 $\frac{2\pi}{|-8|} = \frac{\pi}{4}$

(3) $y = \tan x$ 之週期為 π

所以 $y = 4\tan \pi x$ 之週期為 $\frac{\pi}{\pi} = 1$

5. 設 $a = \sin 100^\circ$ ， $b = \cos 100^\circ$ ， $c = \tan 100^\circ$ ，試比較 a 、 b 、 c 的大小關係

解：

$$a = \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\Rightarrow a > 0$$

$$b = \cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow -1 < b < 0$$

$$c = \tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ$$

$$\Rightarrow -\tan 80^\circ < -\tan 45^\circ = -1$$

$$\Rightarrow c < -1$$

故 $a > b > c$

6. 已知 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，試解方程式 $2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

解：

$$\therefore 2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

當 θ 為第三象限角時， $\theta = 225^\circ$
 當 θ 為第四象限角時， $\theta = 315^\circ$
 故 $\theta = 225^\circ$ 或 315°

7. 某次實驗中測得交流電 y 隨時間 x 變化的函數為 $y = 5\sin(kx + \frac{\pi}{3})$ ，若已知其週期為 $\frac{\pi}{60}$ ，試求 k 值

解： $y = \sin x$ 之週期為 2π

$$y = 5\sin\left(kx + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 之週期為 } \frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{60}$$

得 $|k| = 120 \Rightarrow k = \pm 120$

8. 已知 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，試解方程式 $4\cos^2\theta - 3 = 0$

解：

$$\therefore 4\cos^2\theta - 3 = 0$$

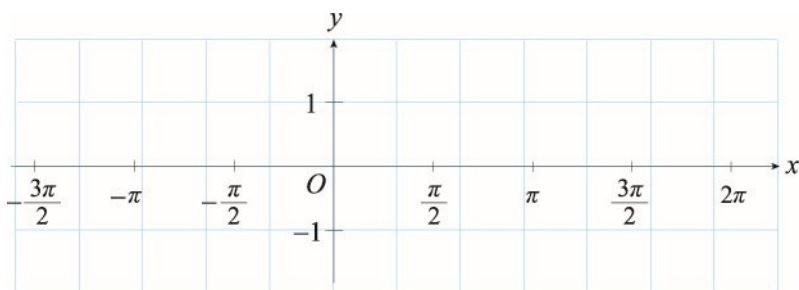
$$\Rightarrow 4\cos^2\theta = 3 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

當 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時， $\theta = 30^\circ$ 或 330°
 當 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 時， $\theta = 150^\circ$ 或 210°
 故 $\theta = 30^\circ$ 或 150° 或 210° 或 330°

9. 試畫出 $y = |\sin x|$ 之圖形並判斷其週期

解：



$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & , \text{當 } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & , \text{當 } \sin x < 0 \end{cases}$$

將 $y = \sin x$ 的圖形在 x 軸下方的部分反轉至 x 軸上方

即可得到 $y = |\sin x|$ 的圖形

並由圖中看出其週期為 π

10. 右圖是 $y = a \sin kx$ ($a > 0$) 的部分圖形，試求 a 、 k 之值

解：

$y = \sin x$ 之振幅為 1，週期為 2π

$y = a \sin kx$ 之振幅為 a ，週期為 $\frac{2\pi}{|k|}$

由圖形可看出

① 振幅 $a = 3$

② 週期 $\frac{2\pi}{|k|} = 8 \Rightarrow |k| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{\pi}{4}$

但 $k = -\frac{\pi}{4}$ 不合

($\because y = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) = -3 \sin \frac{\pi}{4}x$ ，

圖形上下相反)

