



答案欄

1.	(5)	2.	(4)	3.	(4)	4.	(1)	5.	(3)(4)
6.	(1)(3)(5)	7.	(2)(3)	8.	(1)(4)(5)	9.	(7, 3)	10.	5
11.	65	12.	$\sqrt{2}$						

(\*表示解析未完整, 詳細解析請見小老師解答卷)

一、單選題 (每題 7 分, 共 28 分)

(5) 1. 下列哪個數值最小?

- (1)  $\cos 10^\circ \cos 40^\circ + \sin 10^\circ \sin 40^\circ$
- (2)  $\cos 10^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 70^\circ$
- (3)  $\cos 10^\circ \cos 100^\circ + \sin 10^\circ \sin 100^\circ$
- (4)  $\cos 10^\circ \cos 130^\circ + \sin 10^\circ \sin 130^\circ$
- (5)  $\cos 10^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \sin 160^\circ$

- 1. (1)  $\cos 10^\circ \cos 40^\circ + \sin 10^\circ \sin 40^\circ = \cos(40^\circ - 10^\circ) = \cos 30^\circ$
- (2)  $\cos 10^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 70^\circ = \cos(70^\circ - 10^\circ) = \cos 60^\circ$
- (3)  $\cos 10^\circ \cos 100^\circ + \sin 10^\circ \sin 100^\circ = \cos(100^\circ - 10^\circ) = \cos 90^\circ$

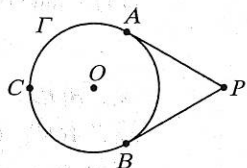
- (4)  $\cos 10^\circ \cos 130^\circ + \sin 10^\circ \sin 130^\circ = \cos(130^\circ - 10^\circ) = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$
- (5)  $\cos 10^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \sin 160^\circ = \cos(160^\circ - 10^\circ) = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$ , 故選(5)

(4) 2. 試問  $y = \frac{x}{2\pi}$  的函數圖形與  $y = 2 \sin 2x$  的函數圖形有幾個交點?

- (1) 12 個
- (2) 13 個
- (3) 14 個
- (4) 15 個
- (5) 16 個

2.  $y = 2 \sin 2x$  的振幅為 2, 週期為  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , 當  $x > 4\pi$  時,  $y = \frac{x}{2\pi} > 2$ ; 當  $x < -4\pi$  時

(4) 3. 日本浮世繪大師葛飾北齋擅長以圓形和三角形來構圖。如右圖, 要畫一隻小老鼠, 可以先作一個以點  $O$  為圓心的圓  $\Gamma$ , 在圓外取一點  $P$ , 過  $P$  作圓  $\Gamma$  的切線段  $\overline{PA}$  及  $\overline{PB}$ , 即完成小老鼠



的身體。若圓  $\Gamma$  的半徑為 6,  $A, B$  為切點且  $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ , 則小老鼠的下半身優

弧  $\widehat{ACB}$  之弧長最接近下列何者?

- (1) 6
- (2) 12
- (3) 13
- (4) 25
- (5) 31

3. 作  $\overline{OA}$  與  $\overline{OB}$ , 則  $\overline{OA} \perp \overline{PA}$ ,  $\overline{OB} \perp \overline{PB} \Rightarrow \angle AOB = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$

\*(1) 4. 若函數  $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos x + 5$ , 則函數  $f(x)$  的最大值為何?

- (1) 7
- (2) 5
- (3) 3
- (4) 1
- (5) 0

108 全國模考

$$4. f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos x + 5 = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos x + 5$$

$$= 2\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2}\right) - 2 \cos x + 5 = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 5 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) + 5$$

二、多選題 (所有選項均答對者, 得 7 分; 答錯 1 個選項者, 得 4 分; 答錯 2 個選項者, 得 1 分; 答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者, 該題以零分計算, 共 28 分)

\*(3)(4) 5. 設  $\theta$  為第二象限角, 則下列哪些選項正確?

- (1)  $\sin \frac{\theta}{2} > 0$
- (2)  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$
- (3)  $\tan \frac{\theta}{2} > 0$
- (4)  $\sin 2\theta < 0$
- (5)  $\cos 2\theta < 0$

5.  $\theta$  為第二象限角, 則  $90^\circ + 360^\circ \times n < \theta < 180^\circ + 360^\circ \times n$ , 其中  $n$  為整數

- (1)  $\times$ : 例如:  $\theta = 460^\circ$  為第二象限角,  $\frac{\theta}{2} = 230^\circ$ , 但  $\sin 230^\circ < 0$
- (2)  $\times$ : 同(1)例,  $\cos 230^\circ < 0$

\*(1)(3) 6. 下列哪些函數的週期為  $\pi$ ?

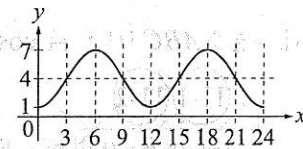
- (5) (1)  $y = \sin x \cos x$
- (2)  $y = \sin(x + \pi)$
- (3)  $y = \cos^2 x$
- (4)  $y = \sin x + \cos x$
- (5)  $y = |\sin x + \cos x|$

6. (1)  $\circ$ :  $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ , 週期為  $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(2)  $\times$ :  $y = \sin(x + \pi)$  的週期為  $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(3)  $\circ$ :  $y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$ , 週期為  $\frac{2\pi}{2} = \pi$

\*(2)(3) 7. 右圖為某地一天 24 小時海水漲落的水深紀錄圖, 其中滿潮(即海平面上升至最高時)的時間為 6 時與 18 時, 此時水深為 7 公尺, 乾潮(即海平面下降至最低時)的時間為 0 時與 12 時, 此時水深為 1 公尺。若水深  $y$ (公尺)與時間  $x$ (時)的關係可表為函數  $y = a \sin(bx + c) + d$ , 其中  $a, b, d > 0$  且  $-\pi < c < 0$ , 則:

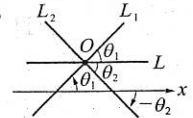


- (1) 此函數的週期為  $2\pi$
- (2)  $a = 3$
- (3)  $b = \frac{\pi}{6}$
- (4)  $c = -3$
- (5)  $d = 1$

7. (1)  $\times$ : 週期為  $18 - 6 = 12$ ; (2)  $\circ$ :  $a = \frac{1}{2}(7 - 1) = 3$

(3)  $\circ$ : 由(1), 週期為  $\frac{2\pi}{b} = 12 \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$

\* (1)(4) 8. 已知坐標平面上三直線  $L$ 、 $L_1$ 、 $L_2$  交於一點  $O$ ，其中  $L$  為一條水平線， $\theta_1$ 、 $\theta_2$  分別為  $L$  與  $L_1$ 、 $L_2$  的銳夾角； $m_1$ 、 $m_2$  分別為  $L_1$ 、 $L_2$  的斜率，且  $m_1 > 0$ ， $m_2 < 0$ 。請選出正確的選項。

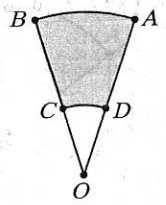


- (1)  $m_1 = \tan \theta_1$   
 (2)  $m_2 = \tan \theta_2$   
 (3)  $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$   
 (4) 若  $\tan \theta_1 \times \tan \theta_2 = 1$ ，則  $L_1$  與  $L_2$  垂直  
 (5) 若  $m_1 m_2 < -1$ ，則  $\theta_1 + \theta_2 > 90^\circ$

8. 如右圖，因為  $L$  與  $x$  軸平行且  $m_1 > 0$ ， $m_2 < 0$ ，所以  $L_1$  與  $L_2$  的斜角分別為  $\theta_1$  與  $-\theta_2$   
 (1)  $\times$ ：因為  $L_1$  的斜角為  $\theta_1$ ，所以  $m_1 = \tan \theta_1$   
 (2)  $\times$ ：因為  $L_2$  的斜角為  $-\theta_2$ ，所以  $m_2 = \tan(-\theta_2) = -\tan \theta_2$   
 (3)  $\times$ ： $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \times \tan \theta_2} = \frac{m_1 + (-m_2)}{1 - m_1 \times (-m_2)} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

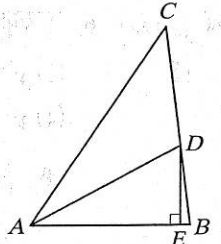
三、選填題 (每格完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分，共 28 分)

\* 9. 如右圖，設  $O$  為扇形  $OAB$  與扇形  $ODC$  的圓心， $\overline{OB} = r_1$ ， $\overline{OC} = r_2$ ，若  $\angle AOB = \frac{\pi}{5}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，且灰色區域的面積為  $4\pi$ ，則數對  $(r_1, r_2) =$  (9-1), (9-2)。



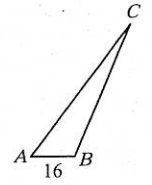
9.  $\overline{BC} = 4 \Rightarrow r_1 - r_2 = 4$ .....①  
 灰色區域的面積 = 扇形  $OAB$  面積 - 扇形  $ODC$  面積 =  $\frac{1}{2} \times r_1^2 \times \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} \times r_2^2 \times \frac{\pi}{5} = 4\pi$   
 $\Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = 40 \Rightarrow (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 40$ .....②

10. 如右圖，已知  $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AD}$  為  $\angle A$  之角平分線， $\overline{DE}$  垂直  $\overline{AB}$  於  $E$ 。若  $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$ ， $\overline{DE} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$ ，則  $\overline{BC}$  之長為 10。



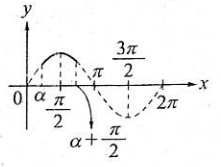
10. 設  $\angle DAC = \angle DAE = \theta$ ， $\sin \theta = \frac{DE}{AD} = \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$   
 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{7}{32} = \frac{9}{16}$ ， $\overline{BC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos 2\theta = 25 \Rightarrow \overline{BC} = 5$

\* 11. 在  $\triangle ABC$  中，若  $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $\cos B = -\frac{5}{13}$ ，且  $\overline{AB} = 16$ ，則  $\triangle ABC$  之外接圓的直徑為 (11-1), (11-2)。



11. 由  $\cos B < 0$  可知  $\angle B$  為鈍角，故  $\angle A$  與  $\angle C$  為銳角  
 $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ ， $\cos B = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin B = \frac{12}{13}$   
 $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C \Rightarrow \sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$

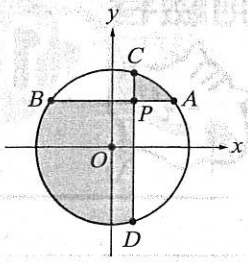
\* 12. 已知函數  $y = \sin x$ ， $\alpha \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$ ，其中  $0 < \alpha < \pi$ 。若  $y$  的最大值為  $A$ ，最小值為  $B$ ，則  $A - B$  之最大值為 (12)。



12. (1) 若  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，則  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi$ ，此時  $y = \sin x$  的圖形如右圖實線部分  
 $A = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ， $B = \sin \alpha$  或  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

四、混合題 (共 16 分)

一般要將一個圓形的 pizza 切成四片，會切兩刀通過圓心的直線，切成全等的四塊扇形。小玉不喜歡吃 pizza 邊，所以她把 pizza 切成如右圖的樣子，其中  $O$  為 pizza 的圓心， $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  垂直且交於  $P$  點。已知 pizza 的半徑為 25 公分，試回答下列問題：



1. 以  $O$  為原點，平行  $\overline{AB}$  的直線為  $x$  軸，平行  $\overline{CD}$  的直線為  $y$  軸，建立一個坐標平面。若  $P$  點坐標為  $(7, 15)$ ，則  $\tan \angle AOC$  為下列何者？(單選)(6 分)

- (1)  $\frac{3}{4}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3)  $\frac{15}{7}$  (4)  $\frac{7}{15}$  (5)  $\frac{7}{24}$

答：(1)。

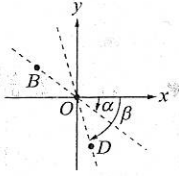
2. 小玉和小英要分這四塊 pizza，小玉拿了灰色的兩塊，小英拿了白色的兩塊。若 pizza 邊的長度為每塊的圓弧長度(即  $\widehat{AC}$ 、 $\widehat{CB}$ 、 $\widehat{BD}$ 、 $\widehat{DA}$ )，則小玉和小英誰吃的 pizza 邊的長度較長？請說明理由。(10 分)

解：1. 因為  $\overline{AB}$  平行  $x$  軸， $\overline{CD}$  平行  $y$  軸，且  $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  交於點  $P(7, 15)$ ，所以可令  $A(a, 15)$ ， $C(7, c)$ ， $a, c > 0$ ，又  $\overline{OA} = \overline{OC} = 25$ ，所以  $a^2 + 15^2 = 25^2$ ， $7^2 + c^2 = 25^2 \Rightarrow a = 20$ ， $c = 24$   
 直線  $OA$  的斜率為  $m_{OA} = \frac{15-0}{20-0} = \frac{3}{4}$ ，直線  $OC$  的斜率為  $m_{OC} = \frac{24-0}{7-0} = \frac{24}{7}$

$$\tan \angle AOC = \frac{m_{OC} - m_{OA}}{1 + m_{OC} \times m_{OA}} = \frac{\frac{24}{7} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{24}{7} \times \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

故選(1)

2. 因為直線  $OB$  與直線  $OA$  對稱於  $y$  軸，直線  $OC$  與直線  $OD$  對稱於  $x$  軸，所以  $m_{OB} = -m_{OA} = -\frac{3}{4}$ ， $m_{OD} = -m_{OC} = -\frac{24}{7}$   
 設直線  $OB$  的斜角為  $\alpha$ ，直線  $OD$  的斜角為  $\beta$   
 直線  $OB$  與直線  $OD$  的銳夾角  $\gamma$ ，則  $\gamma = \alpha - \beta$



$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{m_{OB} - m_{OD}}{1 + m_{OB} \times m_{OD}} = \frac{-\frac{3}{4} - (-\frac{24}{7})}{1 + (-\frac{3}{4})(-\frac{24}{7})} = \frac{3}{4} = \tan \angle AOC \Rightarrow \gamma = \angle AOC$$

又  $\angle BOD + \gamma = \pi$  (徑)，所以  $\angle BOD + \angle AOC = \pi$  (徑)，設  $\angle AOC = \theta$  (徑)， $\angle BOD = \phi$  (徑)  $\Rightarrow \theta + \phi = \pi$  (徑)，灰色塊的 pizza 邊的長度為  $\widehat{AC} + \widehat{BGHD} = 25\theta + 25\phi = 25(\theta + \phi) = 25\pi$   
 又全部的 pizza 邊的長度為  $2\pi \times 25 = 50\pi$ ，所以小玉吃的 pizza 邊的長度為全部的一半，故小玉和小英吃的 pizza 邊的長度一樣長 (有另解於小老師解答卷)

