習作 3.3 貝氏定理 二年____班 座號：____ 姓名：

例題 1 條件機率的乘法法則(一)

(1)籤筒內有 16 支籤，其中 6 支標示有獎，且每支籤被抽中的機會均等。今甲，乙兩人依序抽籤，每人抽一支且抽完不放回，試求甲、乙兩人都中獎的機率

(2)袋中有 4 顆白球、3 顆黑球，甲、乙兩人依序各取出一球，且每顆球被取出的機會均等，取後不放回，試求乙取到白球的機率

解：(1)設 A、B 分別代表甲、乙中獎的事件，則由條件機率的乘法法則得 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{6}{16}\times\frac{5}{15}=\frac{1}{8}$

(2)設 A、B 分別代表甲、乙取到白球的事件，$P(A)=\frac{4}{7}$

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$

例題 2 條件機率乘法法則的推廣

冰箱裡有 10 杯大小相同的飲料，使用膠膜封口，只知道其中 3 杯是咖啡，其餘都是紅茶。若每杯被取出的機會均等，今甲，乙，丙三人依序各取一杯，取出後立即飲用，試求：

(1)甲取出咖啡的機率

(2)甲，乙，丙三人都取得咖啡的機率

解：設 A、B、C 分別代表甲、乙、丙取得咖啡的事件

(1) $P(A)=\frac{3}{10}$

(2) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$

例題 3 機率性質的應用

在西洋占星術裡有白羊、金牛、雙子、巨蟹、……、寶瓶、雙魚等 12 個星座(翻譯名稱可能略有不同)，每個人都可以依自己的生日推算自己屬於哪個星座。假設小偉在班上隨機詢問 5 位同學，試問這 5 位同學有人星座相同的機率

解：假設這 5 位同學都屬於不同星座，機率為 $\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{8}{12}=\frac{55}{144}$

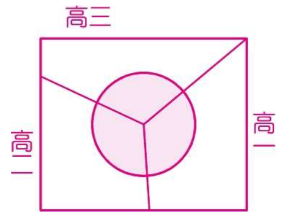
故這 5 位同學有人星座相同的機率為 $1-\frac{55}{144}=\frac{89}{144}$

例題 4 加法法則(一)

某校學生中，高一占全校 35 %，高二占 33 %，高三占 32 %。已知高一學生的 80 % 參加社團，高二學生的 90 %參加社團，高三學生的 40 %參加社團。今隨意抽選該校一名學生，試求此學生參加社團的機率

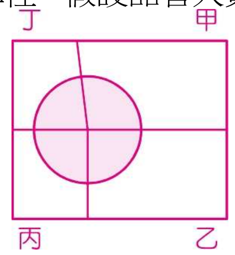
解：由加法法則知所求為 35 %×80 %＋33 %×90 %＋32 %×40 %

$=\frac{7050}{10000}=0.705$



例題 5 加法法則(二)

某公司產品來自甲、乙、丙、丁四部機器，四部機器的產量分別占總產量的 35 %、30 %、20 %、15 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、1 %、1.5 %、2 %。已知這些機器生產的產品都放在總公司的倉庫裡，假設品管人員任意抽取一件檢查，試求此產品不合格的機率



解：由加法法則知所求為 35 %×2 %＋30 %×1 %＋20 %×1.5 %＋15 %×2 %

$$=\frac{160}{10000}=0.016$$

例題 6 貝氏定理(一)

小慧有三個保險箱，每個保險箱各有兩個抽屜。已知第一個保險箱的兩個抽屜各放一枚金幣，第二個保險箱的一個抽屜放一枚金幣、一個放一枚銀幣，第三個保險箱的兩個抽屜各放一枚銀幣。今小慧任選一個保險箱，打開一個抽屜，發現裡面有一枚金幣，試求這個保險箱的另一個抽屜也有一枚金幣的機率

解：設 A、B、C 分別代表取到第一個保險箱、第二個保險箱、第三個保險箱的事件，G 代表取到金幣的事件

如果希望另一個抽屜也有金幣，表示小慧取到第一個保險箱因此所求為計算在已知取到一枚金幣的條件下，此金幣取自第一個保險箱的機率，由條件機率的乘法性質，

$$P(G)=P(A)P(G|A)+P(B)P(G|B)+P(C)P(G|C)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$$

再由貝氏定理可得，此金幣取自第一個保險箱的機率為 $P(A|G)=\dfrac{P(A)P(G|A)}{P(G)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

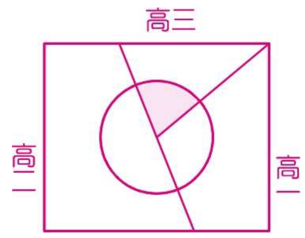
故這個保險箱的另一個抽屜也有一枚金幣的機率為 $\dfrac{2}{3}$

例題 7 貝氏定理(二)

校刊社的社員中，高一占 30 %，高二占 50 %，高三占 20 %。已知高一社員的 20 % 是男生，高二社員的 12 % 是男生，高三社員的 10 % 是男生。試問：

(1)任抽一名社員，此社員是男生的機率

(2)已知小偉(男生)是校刊社社員，他是高三學生的機率



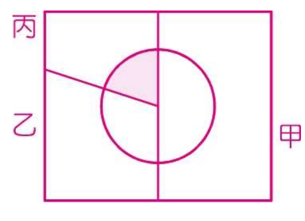
解：(1)由加法法則知所求為 30 %×20 %＋50 %×12 %＋20 %×10 %

$$=\frac{600}{10000}+\frac{600}{10000}+\frac{200}{10000}=0.06+0.06+0.02=0.14$$

(2)由貝氏定理可得 $\dfrac{0.02}{0.06+0.06+0.02}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$

例題 8 貝氏定理(三)

某公司產品來自甲、乙、丙三部機器，三部機器的產量各占總量的 50 %、30 %、20 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、2 %、1 %。今從倉庫任選一個產品測試，已知為不合格產品，試求此產品由丙機器製造的機率



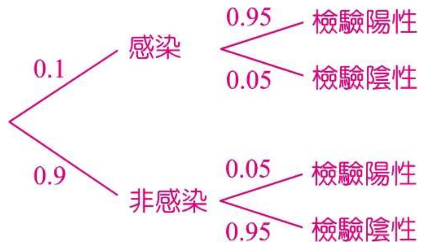
解：將百分比化為小數計算，由貝氏定理可得 $\dfrac{0.2\times0.01}{0.5\times0.02+0.3\times0.02+0.2\times0.01}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$

例題 9　貝氏定理(四)

生技公司開發一種檢測方法，用來判斷是否感染某種病毒。已知真正感染病毒的人，檢驗出結果為陽性的比率為 0.95；未感染而檢驗出陽性(誤判感染)的比例則為 0.05。假設某社區有 10 % 的人已感染此病毒，今任選一人加以檢測，試求：

(1)此人的檢驗結果為陽性的機率

(2)此人確實已感染病毒的機率



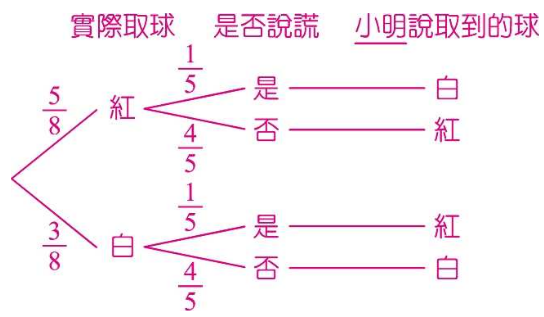
解：(1)由加法法則知檢驗出陽性的機率為 $0.1\times0.95+0.9\times0.05=0.095+0.045=0.14$

(2)由貝氏定理知此人確實感染的機率為 $\dfrac{0.095}{0.095+0.045}=\dfrac{19}{28}$

例題 10　貝氏定理(五)

袋中有 5 紅球、3 白球，小明隨機取出一球，並且說他取到紅球。根據過去的經驗，小明說謊的機率為 $\dfrac{1}{5}$，試求小明確實取到紅球的機率

解：小明說他取到紅球有兩種情形：



取到紅球且說他取到紅球，機率為 $\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{20}{40}$

取到白球但說他取到紅球(說謊)，機率為 $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{40}$

故由貝氏定理可知小明確實取到紅球的機率為 $\dfrac{\frac{20}{40}}{\frac{20}{40}+\frac{3}{40}}=\dfrac{20}{23}$